Jak modelować epidemię?
1. Funkcja wykładnicza
materiały do ćwiczeń

Projekt „Matematyka dla ciekawych świata”

spisali: Piotr Morawiecki, Maria Gokieli i Wojciech Matusiak

zadania pochodzą z różnych źródeł

marzec 2022

1 Podsumowanie wykładu

Funkcja wykładnicza. Na wykładzie pokazaliśmy, że wzrost populacji bakterii można opisać funkcją wykładniczą. Ma ona ogólną postać:

$$N(t) = N_0 a^{kt} \tag{1}$$

gdzie N_0, a i k to stałe. N_0 określi początkową wartość N (np. początkową liczbę bakterii), a to podstawa potęgi, a k określa szybkość wzrostu funkcji (np. szybkość podziału danego gatunku bakterii). Jeśli $a > 1$, to w zależności od znaku parametru k funkcja wykładnicza może albo rosnąć ($k > 0$) lub maleć ($k < 0$).

W matematyce często najwygodniejsza jest funkcja wykładnicza o podstawie e, gdzie e to **liczba Eulera** w przybliżeniu równa $2,71828...$. Udało się nam ją uzyskać jako wartość graniczna, do której dojdziemy obliczając wartość wyrażenia:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

dla coraz wyższych wartości n. Matematycznie można to zapisać za pomocą *granicy*:

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Funkcja wykładnicza e^x jest zdefiniowana w sposób następujący:

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Często będzie się ona pojawiać w przypadku kiedy wzrost wykładniczy będzie zachodzić w sposób ciągły. Łatwo możemy obliczyć jej wartość przy pomocy kalkulatora naukowego na telefonie (lub w przypadku pracowni komputerowej – Pythona).

Logarytmy. Często możemy potrzebować wyznaczyć wykładnik potęgi, który da zadaną wartość, np. znaleźć x w wyrażeniu $2^x = 8$. Wartość tą zapisuje się przy pomocy logarytmu $x = \log_2(8)$. W ogólności logarytm o podstawie a z b, $x = \log_a(b)$, oznacza wykładnik do jakiego należy podnieść podstawę a, żeby uzyskać b, tzn. $a^x = b$.

Logarytm o podstawie e jest nazywany logarytmem naturalnym i jest zapisywany jako $\ln(b)$ lub czasem jako $\log(b)$, bez podania wartości podstawy.

Logarytmy mają kilka przydatnych własności matematycznych. Na przykład dla dowolnych wartości a, x, y i n zachodzą równości:

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$
$$\log_a(x^n) = n\log_a(x)$$

2 Własności funkcji wykładniczej i logarytmów

Zadanie 1

Oblicz:

a) $\log_2 8$

b) $\log_{10} 100\,000$

c) $\log_{1.5} 2.25$

d) $\log_3 \frac{1}{243}$

e) $\log_2 0.125$

f) $\log_{1/2} 8$

g) $\log_{15} 225$

h) $\log_2 \sqrt{8}$

i) $\log_{-0.25} 0.0625$

Zadanie 2

Janek gra ze swoją młodszą siostrą w następujący sposób: siostra wymyśla liczbę od 0 do 1000 ale nie mówi jej. Janek mówi jakąś liczbę, a siostra odpowiada, czy liczba zapisana na kartce jest większa, mniejsza, czy taka, jaką chłopiec podał. Dokładnie tak samo zadaje kolejne pytanie i tak aż do momentu, aż odgadnie liczbę.

Janek podejrzewa, że jego siostra czasem oszukuje i zmienia liczbę w trakcie gry. Zakładając, że to prawda i siostra faktycznie zmienia liczbę w zależności od pytań Janka, ile chłopiec musi ich zadać, żeby na pewno wygrać (lub złapać siostrę na oszustwie)?

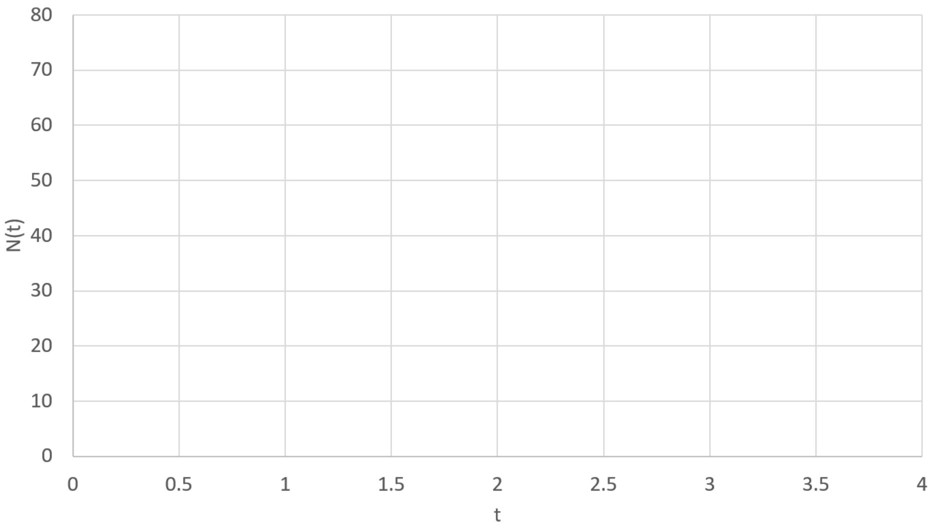
Zadanie 3

Przypuśćmy, że populacja bakterii rośnie w czasie zgodnie ze wzorem:

$$N(t) = N_0 \cdot 2^{k \cdot t}$$

gdzie $N_0 = 10$, $k = 0.5$, a t to czas wyrażony w godzinach. Oblicz z pomocą kalkulatora ile bakterii będzie będziemy mieli po $t = 0$, 1, 2, 3 i 4 godzinach. Spróbuj naszkicować wykres przedstawiający liczbę bakterii w czasie.

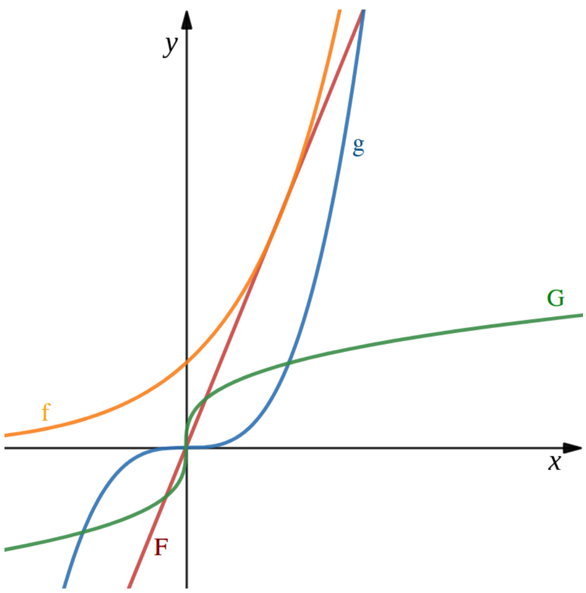
Następnie spróbuj naszkicować wykres populacji bakterii dla $k = 1$ oraz $k = -0.5$. Opisz jak zmiana parametru k wpłynęła na przebieg funkcji.



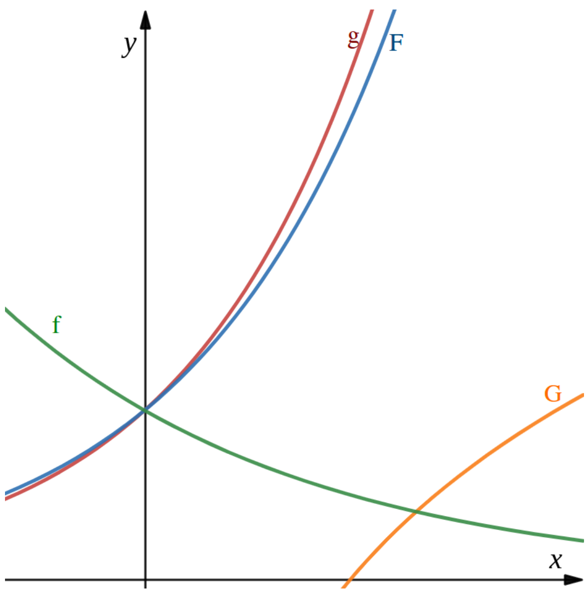
Zadanie 4

Dobierz równanie do wykresów. Uzasadnij swój wybór. Nie używaj komputera / kalkulatora.

(1a) $y = 3x$	(1b) $y = x^3$	(1c) $y = 3^x$	(1d) $y = \sqrt[3]{x}$
(2a) $y = \log_3 x$	(2b) $y = e^x$	(2c) $y = 3^x$	(2d) $y = 2^{-x}$



(1)



(2)

Zadanie 5

Udowodnij własności:

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$
$$\log_a(x^n) = n \log_a(x)$$

Wskazówka: Przedstaw x i y jako potęgi a.

Zadanie 6

Oblicz używając kalkulatora następujące wyrażenia:

- $\frac{1}{0!}$
- $\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!}$
- $\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}$
- $\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}$
- $\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}$
- $\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!}$
- $\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!}$

gdzie $x! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot x$ to silnia x, tzn. iloczyn wszystkich liczb całkowitych od 1 do x. Przyjmuje się, że $0! = 1$. Co obserwujesz? Do jakiej wartości zmierzają wyniki kolejnych obliczeń? "Sprawdź" swoją hipotezę obliczając np.

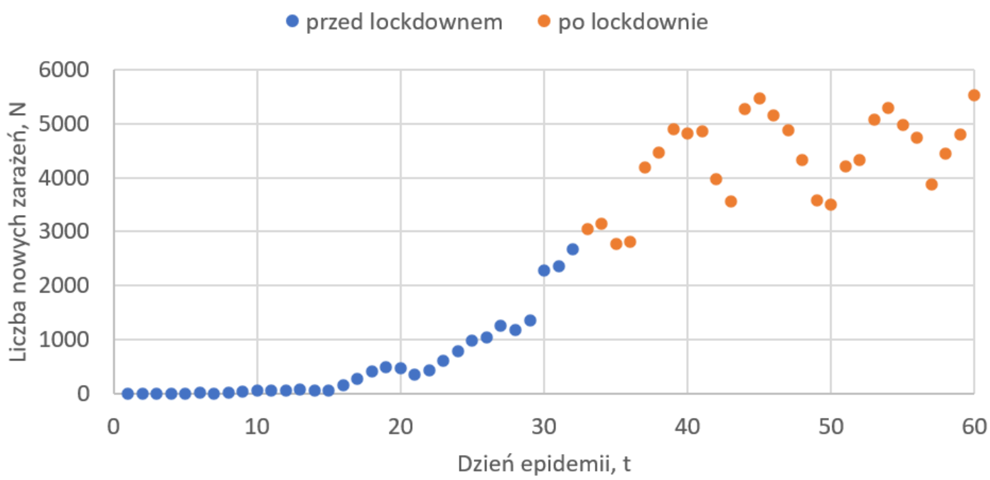
$$\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} + \frac{1}{10!}$$

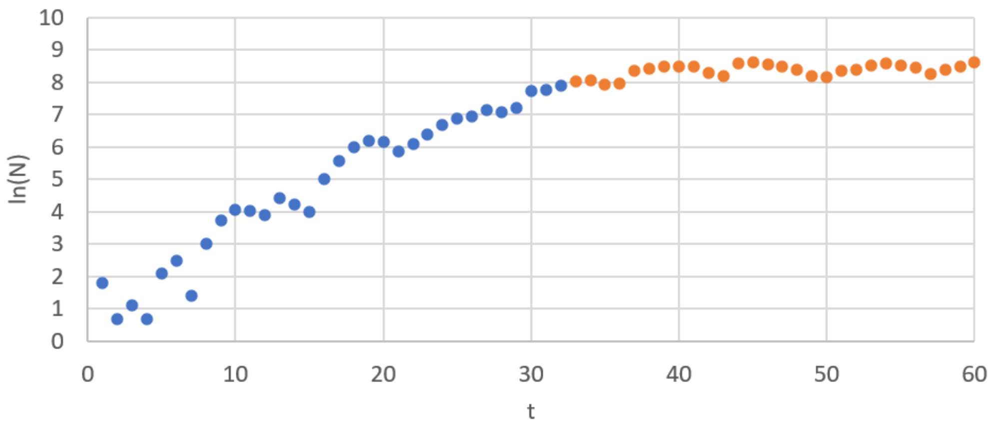
3 Zastosowania funkcji wykładniczej

Zadanie 7

Funkcja wykładnicza może być wykorzystana do opisu szybkości rozchodzenia się epidemii. Wykres przedstawiony na rysunku 3 przedstawia liczbę nowych dziennych przypadków zachorowań na wirusa w Wielkiej Brytanii od 23 lutego 2020 (dzień 1) do 22 kwietnia 2020 (dzień 60). Dnia 16 marca (dzień 22) premier Boris Johnson zalecił unikanie bezpośrednich kontaktów oraz podróżowania, a 26 marca (dzień 32) wprowadził pierwszy narodowy lockdown.

1. Na podstawie górnego wykresu opisz słownie jak zmieniała się liczba zachorowań przed i po lockdownie.
2. W celu zilustrowania szybkości rozprzestrzeniania się epidemii stosuje się skalę logarytmiczną. Na wykresie dolnym na osi pionowej zamiast liczby chorych (N) przedstawiono jej logarytm naturalny $\ln(N)$. Pokaż, że funkcja wykładnicza
$$N(t) = N_0 e^{kt} \tag{2}$$
na takim wykresie jest linią prostą.
Wskazówka: Zastosuj logarytm naturalny do obu stron powyższego równania, a następnie spróbuj uprościć wyrażenie po jego prawej stronie.
3. Na podstawie dolnego wykresu określ czy funkcja wykładnicza skutecznie opisuje przebieg epidemii COVID-19 w Wielkiej Brytanii.
4. Oszacuj parametr wzrostu k funkcji wykładniczej ze wzoru (2) we wczesnej fazie epidemii (poprzedzającej wprowadzenie lockdownu). Następnie oszacuj ile dziennych zachorowań moglibyśmy zaobserwować po 60 dniach gdyby pierwszy lockdown nie został wprowadzony.





Zadanie 8

W Maju 1945 Han van Meegeren, holenderski malarz i portrecista, został oskarżony o sprzedaż prac znanego malarza Vermeera (1632-1675) nazistom w trakcie wojny, co było postrzegane za akt zdrady karany śmiercią. Bronił się jednak przed oskarżeniami twierdząc, że obrazu nie były autorstwa Vermeer, ale że własnoręcznie je podrobił. W związku z tym został oskarżony o fałszerstwo w październiku 1947 roku i został skazany na rok pozbawienia wolności, umierając w więzieniu na atak serca w grudniu 1947. Jednak dalej toczył się spór w sprawie autentyczności jednego z obrazów, zatytułowanego *Wieczerza w Emmaus*, i specjalny test został przeprowadzony dwadzieścia lat później, żeby określić jego wiek. Był on oparty na rozpadzie promieniotwórczym izotopu ołowiu ^{210}Pb występującego w białym ołowiu, powszechnie wykorzystywanego za czasów Vermeera jako biały barwnik.

Czas połowicznego rozpadu ołowiu to 22.3 lat, tzn. co 22.3 lata ich ilość (a co za tym idzie aktywność promieniotwórcza próbki) maleje o połowę. Aktywność na gram farby kiedy obraz został po raz pierwszy namalowany szacuje się na około 22 rozpadów na minutę na gram próbki. W roku 1967 roku zmierzono aktywność promieniotwórczą na poziomie około 8.5 rozpadów na minutę na gram próbki. Sformułuj funkcję wykładniczą opisującą zmianę aktywności próbki w czasie. Korzystając z powyższych danych czy sądzisz, że obraz rzeczywiście został sfałszowany?

Zadanie 9

Pojedyncza pastylka paracetamolu zawiera 1g substancji czynnej. Załóżmy, że jest ona całkowicie absorbowana do krwi zaraz po spożyciu pastylki. Krew człowieka ma objętość około 5 litrów. Czas połowicznego rozpadu paracetamolu jest szacowany na 2 godziny (czyli co dwie godziny połowa paracetamolu jest usuwana z krwi).

Wykorzystując powyższe informacje oszacuj odpowiedz na poniższe pytania:

1. Jaka jest koncentracja paracetamolu we krwi zaraz po spożyciu pastylki?
2. Zapisz funkcję wykładniczą opisującą zmianę koncentracji paracetamolu we krwi w czasie. Jaka koncentracja pozostanie po 1 godzinie i po pięciu godzinach?
3. Efekt paracetamolu nie jest obserwowany gdy jego koncentracja spadanie poniżej 2mg/litr. Oszacuj czas kiedy to nastąpi.
4. (*) Według recepty z paczki paracetamolu powinno się go dawkować nie częściej niż co 6 godzin. Jaka jest największa możliwa koncentracja paracetamolu w naszej krwi jeśli będziemy stosować się do recepty? Jak się ona zmieni jeśli będziemy go częściej zażywać?

Zadanie 10

Banki oferują lokaty bankowe o różnym oprocentowaniu, żeby zachęcić nas do powierzenia im naszych oszczędności. Oprocentowanie może być obliczane i wypłacane według różnych stawek.

1. Przypuśćmy, że wpłacamy do banku 10000 złotych na lokatę o oprocentowaniem 10% i kapitalizacji rocznej (czyli odsetki otrzymamy po upływie roku). Jaką kwotą będziemy dysponować po upływie roku?
2. Udało nam się znaleźć inną ofertę lokaty również z oprocentowaniem 10%, ale z kapitalizacją 6-miesięczną (czyli połowę odsetek otrzymamy już po połowie roku, i będziemy je

mogli ponownie umieścić na lokacie). Jaką kwotą byśmy dysponowali po wpłaceniu 10000 złotych na tę lokatę?

3. Oszacuj nasz kapitał po umieszczeniu go na rok na lokacie 10% o kapitalizacji:
   - 3-miesięcznej,
   - miesięcznej,
   - dniowej.

4. Co stanie się jeśli dalej byśmy skracali okres kapitalizacji? Czy zysk będzie rósł nieograniczenie czy dojdzie do pewnej stałej wartości? Wyjaśnij dlaczego.
   Wskazówka: Zapisz równanie matematyczne opisujące twój zysk w zależności od ilości kapitalizacji n w ciągu roku (np. $n = 1$ w przypadku kapitalizacji rocznej, $n = 2$ w przypadku kapitalizacje 6-miesięcznej itd).

5. W księgowości używa się czasem tzw. reguła 69 (z angielskiego "Rule of 69"). Określa ona, że jeśli odsetki są naliczane w sposób ciągły, to nasz stan konta ulegnie podwojeniu po czasie $69/r$, gdzie r to oprocentowanie naszego konta. Na przykład jeśli oprocentowanie wynosi 10% to nasz stan konto powinien ulec podwojeniu po $\frac{69}{10} = 6.9$ latach. Spróbuj uzasadnić tę regułę matematycznie.

4 Proponowane zadania domowe

Uwaga: Poniższe zadania są proponowane jako zadania domowe, ale prowadzący może wybrać inne zadania jak praca domowa i zaproponować inny rozkład punktacji. Możecie oddać prowadzącemu rozwiązania wszystkich lub tylko części zadań domowych. Maksymalna liczba punktów, którą można zdobyć w każdym tygodniu wynosi 6. Powodzenia!

4.1 Funkcja wykładnicza i logarytmy

Zadanie 11 (1 punkt)

Ludzkość kolonizuje galaktykę! Ziemia wysłała trzy statki, z!których każdy za 100 lat skolonizuje jedną planetę. Następnie, każda z tych nowych planet skolonizuje 3 kolejne za dokładnie 100 kolejnych lat i tak dalej. Ile lat minie, zanim galaktyczne imperium posiądzie więcej, niż 67 planet?

Zadanie 12 (1 punkt)

W „Wielkiej Encyklopedii Komputerowej 1984" znajduje się 16 tysięcy haseł. Ze względu na toporność tego produktu, nie można w nim wyszukać interesującego nas hasła. Można jedynie podać numer tego, które chcemy sprawdzić i ono się nam wyświetli. Ile haseł musimy sprawdzić, żeby odnaleźć jedno, które nas interesuje, jeżeli hasła są ponumerowane według kolejności alfabetycznej?

Zadanie 13 (1 punkt)

Nasz kalkulator potrafi obliczać tylko logarytm o podstawie 10. W jaki sposób możemy na nim policzyć logarytm przy podstawie 5?

Zadanie 14 (2 punkty)

Ile cyfr potrzeba, żeby zapisać liczbę googol (czyli 10^{100} w systemie binarnym? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 15 (2 punkty)

Funkcję wykładniczą wykorzystuje się m.in. do opisywania rozpadu promieniotwórczego. Ciekawym przykładem jej zastosowania jest datowanie radiowęglowe, które jest wykorzystywane między innymi przez archeologów do datowania przedmiotów odnalezionych w trakcie wykopalisk. Wykorzystuje on radioaktywny izotop C^{14} naturalnie występujący w niewielkiej ilości w atmosferze.

Podczas życia zwierzęta i rośliny wymieniają węgiel w postaci dwutlenku węgla z atmosferą, utrzymując stałą proporcję izotopu ^{14}C w swoim organizmie. Kiedy organizm umrze, wymiana węgla z atmosferą ustaje, a promieniotwórczy izotop ^{14}C stopniowo się rozpada, a jego aktywności (mierzona w liczbie rozpadów na minutę na gram materii) maleje wykładniczo z okresem połowicznego rozpadu $T_{1/2} = 5730$ lat.

W przypadku żywego drewna jego aktywność wynosi 6.68 rozpadów na minutę na gram. Węgiel drzewny odnaleziony na poziomie mieszkalnym w jaskini Lascaux we Francji ma aktywność 0.97 rozpadów na minutę na gram. Zapisz funkcję wykładniczą opisującą zmianę aktywności