Geometryczne liczby.
6. Liczby wymierne, rzeczywiste i geometria zespolona
materiały do ćwiczeń

Projekt „Matematyka dla ciekawych świata”
spisał: Michał Korch

18 maja 2020

1 Matematyka wyborcza

Zadanie 1

W okręgu wyborczym oddano 31200 głosów. Do przydzielenia jest 5 mandatów w sejmie. Mandaty rozdzielono metodą d'Hondta (metoda z dzieleniem liczby głosów przez kolejne liczby naturalne i zakreśleniem tylu największych ile mandatów mamy do przyznania). W wyborach startowały 4 partie: Alchemików, Botaników, Cyników i Domokrążców.

a) partie osiągnęły następujące liczby głosów: A: 12000, B: 8000, C: 7000, D: 4200. Ile mandatów zdobyły poszczególne komitety w tym okręgu? Jakie wady związane z naruszeniem proporcjonalności dostrzegasz w tym wyniku?

b) a jakie wyniki byłyby, gdyby 700 wyborców partii Botaników zagłosowało jednak na Alchemików. Kto straci, a kto zyska mandat?

Zadanie 2

Na wykładzie zobaczyłaś/eś różne systemy wyborcze pozwalające na wybór jednego kandydata. Były to:

a) system lwa (wygrywa ten, co ma najwięcej głosów),

b) system słonia (jest jeszcze druga tura),

c) system małpy (każdy wyborca może dać ulubionemu kandydatowi 3p, kolejnemu 2p i jeszcze kolejnemu 1p, wygrywa ten o największej liczbie punktów),

d) system żyrafy (każdy ma do oddania głos za (dodatni) i głos przeciw (ujemny)),

e) system zebry (po głosowaniu odpada najsłabszy kandydat i głosujemy ponownie, i tak dalej, dopóki któryś kandydat nie zbierze większości),

f) system węża (pojedynki jeden na jednego ustawione w drabinkę turniejową).

Przemyślcie każdy z tych systemów pod kątem wad i zalet, które w nich widzisz. Którego z tych systemów chcielibyście używać do wyborów przewodniczącego samorządu klasowego? A którego chcielibyście używać do wyborów prezydenta miasta? Dlaczego?

2 Relacje

Relacje to po prostu zbiór par złożonych z elementów pewnego zbioru X. Jeśli element x jest w relacji $\sim$ z elementem y, to napiszemy $x \sim y$. Jeśli dla każdych $x, y, z \in X$ mamy

- , że $x \sim x$, to relację nazywamy zwrotną,
- jeśli $x \sim y$, to $y \sim x$, to relację nazywamy symetryczną,
- jeśli $x \sim y$ oraz $y \sim z$, to $x \sim z$, to relację nazywamy przechodnią.

Relację zwrotną, symetryczną i przechodnią nazywa się relacją równoważności.

Zadanie 3

Sprawdź które z następujących relacji są zwrotne? Które są symetryczne, a które przechodnie? Które zatem są relacjami równoważności?

a) dwoje ludzie jest ze sobą w relacji „starszy”, jeśli wiek pierwszej osoby w parze jest większy lub równy wiekowi drugiej osoby.

b) dwie liczby całkowite są w relacji „modulo 7”, jeśli dają tą samą resztę z dzielenia przez 7.

c) dwa dźwięki są w relacji „oktawa”, jeśli różnią się o pewną wielokrotność oktawy.

d) dwa państwa są w relacji „wspólna organizacja”, jeśli oba należą do jakiejś takiej samej organizacji międzynarodowej.

e) dwie książki są w relacji „tak samo gruba”, jeśli mają tyle samo stron.

f) dwa domy są w relacji „mniej więcej tam samo”, jeśli mają ten sam kod pocztowy.

g) dwie liczby wymierne są w relacji „odwrotne”, jeśli ich iloczyn wynosi 1.

h) dwie proste na płaszczyźnie są w relacji „równoległe”, jeśli są równoległe (lub się pokrywają).

i) dwie liczby wymierne są w relacji „blisko”, jeśli różnią się (moduł ich różnicy) o co najwyżej $\frac{1}{2}$.

j) dwie liczby rzeczywiste są w relacji „taki sam znak”, jeśli obie są < 0 lub obie są ≥ 0.

Zadanie 4

Jeśli $\sim$ jest relacją równoważności oraz $x \in X$, to klasą abstrakcji elementu x nazywamy zbiór wszystkich rzeczy, które są z nimi w relacji. Zauważ, że klasy abstrakcji stanowią podział oryginalnego zbioru.

W poprzednim zadaniu w przypadku relacji równoważności opisz klasy abstrakcji. Czy da się powiedzieć ile jest klas abstrakcji w poszczególnych wypadkach?

3 Niewymierność

Zadanie 5

Udowodnij, że następujące liczby nie są wymierne:

a) $\sqrt{3}$,
Wskazówka: Wskazówkę do tego zadania znajdziesz na końcu skryptu.

b) $\sqrt[3]{2}$,

Zadanie 6

Mając dany odcinek długości $1cm$, skonstruuj przy pomocy cyrkla i linijki (bez podziałki) odcinek o długości $\sqrt{3}$cm.
Wskazówka: Wskazówkę do tego zadania znajdziesz na końcu skryptu.

4 Ciągi

Powiemy, że ciąg jest ograniczony z góry, jeśli jest liczba, która jest większa od każdego wyrazu tego ciągu. Ciąg jest rosnący, jeśli każdy kolejny wyraz jest większy lub równy od poprzedniego. W końcu ciąg jest ciągiem Cauchy'ego, jeśli wyrazy tego ciągu są coraz bliższe sobie, to znaczy dla każdego n, od pewnego miejsca, czyli dla dowolnych $i, j > k$ mamy $|a_i - a_j| < 1/n$ (gdzie a_i to i-ty wyraz ciągu, a a_j to j-ty jego wyraz). Każdy ciąg ograniczony z góry i rosnący jest ciągiem Cauchy'ego, a dla każdego ciągu Cauchy'ego można znaleźć jego granicę, czyli liczbę rzeczywistą g, taką że wyrazy ciągu są coraz bliżej tej liczby, czyli dla każdego n, od pewnego miejsca, czyli dla każdego $i > k$, $|a_i - g| < 1/n$.

Zadanie 7

Sprawdź, które z następujących ciągów są rosnące? Które są ograniczone z góry?

1. $1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, \ldots$,
2. $0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, 2 \ldots$ $(a_n = n - 3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor)$,
3. $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$ $(a_n = \frac{n}{n+1})$,
4. $-1, -2, -4, -8, \ldots$ $(a_n = -2^n)$,
5. $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots$ $(a_n = \frac{(-1)^n}{n+1})$,
6. $2, 0, \frac{2}{3}, 0, \frac{2}{5}, 0, \frac{2}{7}, \ldots$ $(a_n = \frac{1+(-1)^n}{n+1})$.

Sprawdź, które są ciągami Cauchy'ego i wyznacz ich granicę.

Zadanie 8

Wiedząc, że pole powierzchni sfery dane jest wzorem $4\pi r^2$ oraz, że objętość dowolnego ostrosłupa to $\frac{1}{3}$ pola jego podstawy przemnożone przez wysokość, przeprowadź dowód tego, że objętość kuli dana jest wzorem $\frac{4}{3}\pi r^3$.
Wskazówka: Wskazówkę do tego zadania znajdziesz na końcu skryptu.

5 Moce zbiorów

Zadanie 9

Okazuje się, że zbiór wszystkich nieskończonych ciągów zero-jedynkowych też ma tę własność, że nie jest możliwe zakwaterowanie wszystkich jego elementów w hotelu Hilberta. Spróbujcie to udowodnić!

Wskazówka: Należy przeprowadzić dowód „nie wprost". Więcej wskazówek znajdziecie na końcu tego skryptu.

Słynne twierdzenie Cantora mówi, że podzbiorów dowolnego zbioru jest więcej niż jego elementów. Sprawdźmy najpierw, że rzeczywiście tak jest dla skończonych zbiorów. Ile jest podzbiorów dowolnego zbioru n-elementowego? Oczywiście, 2^n. Dla każdego z n-elementów podejmujemy wybór czy ma być, czy ma nie być w konstruowanym podzbiorze, więc mamy $\overbrace{2 \cdot \ldots \cdot 2}^{n} = 2^n$ możliwości.

Zadanie 10

Okazuje się, że to jest też prawda, dla zbiorów nieskończonych. Udowodnijcie, że podzbiorów zbioru liczb naturalnych jest więcej niż samych liczb naturalnych. To znaczy, że wszystkich podzbiorów nie da się ustawić w pary z liczbami naturalnymi!

Wskazówka: Ale może da się ustawić z czymś innym? Więcej wskazówek na końcu skryptu!

6 Liczby zespolone

Aby w pełni móc uprawiać algebrę, potrzebujemy umieć pierwiastkować liczby ujemne. W tym celu musimy wprowadzić nową liczbę i, o takiej własności, że $i^2 = -1$. Liczby zespolone $\mathbb{C}$ to liczby postaci $z = a + bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$. Liczby a i b nazywamy odpowiednio częścią rzeczywistą i urojoną liczby z i oznaczamy $\mathrm{Re}z$ i $\mathrm{Im}z$. A zatem każdą liczbę zespoloną $a + bi$ możemy przedstawić (i będziemy to często robić) na płaszczyźnie jako punkt o współrzędnych (a, b). Będziemy tą płaszczyznę nazywać płaszczyzną zespoloną.

Dodajemy i mnożymy liczby zespolone „po prostu", pamiętając jedynie, że $i^2 = -1$, a zatem: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + i(b + d)$ oraz $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + i(bc + ad)$. Np.: $(1 + i)(-2 - 3i) + (-1 + 2i) = (1 - 5i) + (-1 + 2i) = -3i$.

Nietrudno również podzielić dwie liczby zespolone przez siebie – wystarczy „wyciągnąć urojoność z mianownika" (podobnie czasem się postępuje przy dzieleniu przez liczbę niewymierną z pierwiastkiem). Czyli:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2}.$$

Każdą liczbę zespoloną $z = a + ib$, różną od 0, możemy zapisać jeszcze na jeden sposób – mianowicie definiuje ją jej odległość od zera, zwana modułem, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ oraz kąt pomiędzy tą liczbą a osią rzeczywistą, zwany argumentem $\mathrm{Arg}z$ ($\sin \mathrm{Arg}z = \frac{b}{|z|}$, $\cos \mathrm{Arg}z = \frac{a}{|z|}$). A zatem $z = |z| (\cos \mathrm{Arg}z + i \sin \mathrm{Arg}x)$.

Np.: niech $z = 1 - i$, wtedy $|z| = \sqrt{2}$ oraz $\mathrm{Arg}z = \frac{-\pi}{4}$. W drugą stronę, jeśli $\mathrm{Arg}x = \frac{-\pi}{6}, |x| = 2$, to $x = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = \sqrt{3} - i$.

Zadanie 11

Wykonaj działania (w drugim przypadku warto skorzystać z modułów i argumentów!):

$$\frac{(3+i)^2}{(1+2i)^2} - \frac{(1-2i)^3}{(1+i)^3}$$

$$\frac{i^3(1-i)^{10}}{(1+i\sqrt{3})^7(\sqrt{3}-i)^8}$$

Widać od razu, że dodawania liczb zespolonych od strony geometrycznej, to po prostu dodawanie wektorów na płaszczyźnie zespolonej.

Ale dużo bardziej ciekawe jest mnożenie i z pomocą przychodzi tu postać biegunowa. Mianowicie okazuje się, że mnożenie dwóch liczb zespolonych przez siebie powoduje przemnożenie ich modułów i dodanie ich argumentów. Ten fakt jest wyjątkowo przydatny przy liczeniu potęg licz zespolonych – i stąd bierze się tzw. wzór de Moivre'a:

$$z^n = |z|^n \left(\cos n\mathrm{Arg}z + i \sin n\mathrm{Arg}z\right).$$

Zastosujmy tę wiedzę do jakiegoś przykładu, np. policzmy $(1+i)^6(\sqrt{3}-i)$. Mamy:

- $1+i$ ma moduł $\sqrt{2}$ i argument $\frac{\pi}{4}$, a zatem $(1+i)^6$ ma moduł 8 i argument $\frac{6\pi}{4}$, czyli inaczej $\frac{-\pi}{2}$.
- $\sqrt{3}-i$ ma moduł 2 i argument $\frac{-\pi}{6}$, a zatem $(1+i)^6(\sqrt{3}-i)$ ma moduł 16 i argument $-\frac{2\pi}{3}$.

Liczb zespolonych można w związku z tym z powodzeniem użyć do rozwiązania zadań geometrycznych:

Zadanie 12

Na bokach AB i AC trójkąta ABC zbudowano, po jego zewnętrznej stronie, kwadraty $ABDE$ i $ACFG$. Punkty M i N są odpowiednio środkami odcinków DG i EF. Wyznacz możliwe wartości wyrażenia $MN : BC$ (zadanie pochodzi z LII OM).
Wskazówka: Należy przeprowadzić dowód „nie wprost". Więcej wskazówek znajdziecie na końcu tego skryptu.

7 Zadania dodatkowe

Zadanie 13

Porównaj metody d'Honta (metoda z dzieleniem liczby głosów przez kolejne liczby naturalne) oraz rozszerzoną metodę Sainte-Laguë (metoda z dzieleniem przez $1,4$ oraz $3,5,7,\ldots$) na następującym przykładzie. W okręgu oddano 45000 głosów i było do zdobycia 9 mandatów. Startowało 7 partii i osiągnęły one następujące wyniki:

Ekranizatorzy	12000
Fundriserzy	11500
Gawędziarze	7500
Histerycy	6000
Ideowcy	4000
Jałmużnicy	2200
Kabareciarze	1800

Ile mandatów zdobyłyby poszczególne komitety, jeśli mandaty przydzielane byłyby pierwszą metodą? Ile jeśli drugą? Jakie są różnice i jakie widzisz niedoskonałości w tych metodach? Która jest lepsza dla dużych partii?
Wskazówka: Użyj kalkulatora. :P

Zadanie 14

Czy może istnieć relacja równoważności pomiędzy liczbami naturalnymi, która daje skończenie wiele klas abstrakcji o skończonej liczbie elementów każda?

Zadanie 15

Udowodnij, że liczba $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ nie jest wymierna.
Wskazówka: Wskazówkę do tego zadania znajdziesz na końcu skryptu.

Zadanie 16

Wiedząc, że $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$, znajdź granicę ciągu $(1-\frac{1}{n})^n$. $(n>0)$.
Wskazówka: Wskazówkę do tego zadania znajdziesz na końcu skryptu.

Zadanie 17

Wiemy, że wszystkich nieskończonych ciągów zero-jedynkowych nie da się zakwaterować w hotelu Hilberta. A jak będzie ze skończonymi ciągami zero-jedynkowymi? Czy je wszystkie można zakwaterować w hotelu Hilberta?

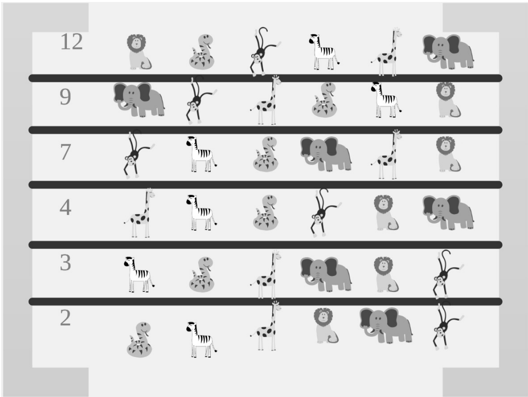
Zadanie 18

Zauważ, że dla każdej liczby zespolonej $z \neq 0$ mamy zawsze n liczb x takich, że $x^n = z$. Rzeczywiście pierwsza z nich powstaje poprzez policzenie pierwiastka z modułu $\sqrt[n]{|z|}$ oraz podzielenia argumentu przez n. Ale jeśli do takiego argumentu dorzucę jeszcze dowolną wielokrotność liczby $\frac{2\pi}{n}$, to po podniesieniu do potęgi n dostanę to samo, bo dodatkowy kąt zsumuje się do wielokrotności 2π. Wszystkie te liczby będziemy nazywać pierwiastkami. Znajdź wszystkie $\sqrt[4]{-16}$.

8 Proponowane zadania domowe

Zadanie 19 (2 punkty)

Obejrzyj symulację wyborów z kilkoma mandatami do przyznania metodą głosu przechodniego `https://youtu.be/Ac9070OIMUg`. Zaprezentuj wybory na sawannie ze znanymi Ci z wykładu preferencjami wyborców:



jeśli zamiast przewodniczącego sawanny wybieramy 4-miejscową Radę Sawanny.

Zadanie 20 (2 punkty)

Udowodnij, że następujące liczby nie są wymierne:

a) $\sqrt{6}$,

b) $\sqrt[3]{3}$.

Zadanie 21 (2 punkty)

Dane są punkty B i C. Punkt A jest dowolnym punktem ustalonej półpłaszczyzny wyznaczonej przez prostą AB. Na bokach trójkąta ABC zbudowano, na zewnątrz, kwadraty $ABDE$ i $ACFG$. Wykaż, że wszystkie tak otrzymane proste DF przechodzą przez pewien ustalony punkt, zależny tylko od położenia B i C (zadanie pochodzi z artykułu z „Delty” autorstwa J. Jaszuńskiej).
Wskazówka: Wskazówkę do tego zadania znajdziesz na końcu skryptu.

9 Wskazówki do niektórych zadań

Zadanie 5

Wskazówka: Załóż, że taką liczbę da się zapisać w postaci ułamka i że jest on skrócony (licznik nie dzieli się przez żaden dzielnik mianownika).

Zadanie 6

Wskazówka: Skorzystaj z Tw. Pitagorasa

Zadanie 8

Wskazówka: Wyobraź sobie wielościany wpisane w tą sferę, których ściany boczne to coraz większa liczba trójkątów.

Zadanie 12

Wskazówka: Rozważ to zadanie na płaszczyźnie zespolonej. Niech $A = 0$ *oraz* $C = c$*. Wtedy* $G = ic$ *oraz* $F = c + ic$*.*

Zadanie 15

Wskazówka: Załóż przeciwnie, że ta liczba jest równa pewnej liczbie wymiernej. Przenieś jeden z pierwiastków na drugą stronę równania i podnieś stronami do kwadratu.

Zadanie 16

Wskazówka: $(1 - \frac{1}{n}) = \frac{n-1}{n} = \frac{1}{\frac{n}{n-1}}$.

Zadanie 21

Wskazówka: Umieść tę sytuację na płaszczyźnie zespolonej.