Geometryczne liczby.
4. Jestem Euklidesem
materiały do ćwiczeń

Projekt „Matematyka dla ciekawych świata”
spisał: Michał Korch

30 marca 2020

1 Księga pierwsza

W swojej pierwszej księdze Euklides w szczególności „definiuje” różne pojęcia geometryczne. Nie korzysta z tych definicji nigdy potem, a jedynie z aksjomatów. Zatem definicje te mają głównie czytelnikowi pokazać o czym mowa i dać trochę intuicji.

Zadanie 1

Zastanówcie się, jak Wy moglibyście zdefiniować, co to jest punkt, linia, linia prosta i powierzchnia. Porównajcie swoje idee z definicjami Euklidesa, które poda Wam prowadzący.

Poza tym w pierwszej księdze Euklides dowodzi kilkanaście prostych twierdzeń i przeprowadza kilka relatywnie prostych konstrukcji. Na przykład:

Zadanie 2

Zaproponujcie jak przy pomocy cyrkla i linijki podzielić dany kąt na dwie równe części.

2 Księga druga

W drugiej księdze Euklides przy pomocy geometrii dowodzi równości różnych prostych wyrażeń arytmetycznych.

Zadanie 3

Narysujcie rysunek, który dowodzi, że $(a+b)^2 = a(a+b) + b(a+b)$.

3 Księga trzecia

W trzeciej księdze, Euklides zajmuje się okręgami. Zaczyna od następującej konstrukcji. Spróbujcie wymyślić ją sami.

Zadanie 4

Jak mając dany okrąg, ale bez zaznaczonego środka, przy pomocy cyrkla i linijki (bez podziałki, oczywiście) ten środek znaleźć?

Jak wiecie, twierdzenie o potędze punktu, które dowiódł Euklides w 3. księdze „Elementów” mówi, że jeśli dany jest okrąg o oraz proste k i l przecinające się w punkcie P na zewnątrz okręgu o, takie że A i B to punkty przecięcia k i okręgu o, zaś l jest styczna do o w punkcie C, to:

$$|PC|^2 = |PA| \cdot |PB|.$$

Zatem jeśli mamy punkt P i okrąg o, to jakkolwiek go przetniemy prostą uzyskując punkty A i B, iloczyn długości $|PA||PB|$ będzie taki sam. Ten iloczyn nazywa się potęgą punktu P względem okręgu o.

Zadanie 5

Udowodnijcie to twierdzenie w przypadku, gdy prosta k przechodzi przez punkt O będący środkiem okręgu o.

Zadanie 6

Udowodnijcie twierdzenie o potędze punktu w ogólnym przypadku, czyli gdy prosta k nie przechodzi przez środek okręgu.

Zadanie 7

Załóżmy, że odcinki AB i CD przecinają się w punkcie P oraz $|AP||BP| = |CP||DP|$. Udowodnijcie, że A, B, C, D leżą na jednym okręgu.

4 Księga czwarta

W tej księdze Euklides zajmuje się figurami wpisanymi i opisanymi na okręgu. Figura wpisana w okrąg to figura (wtedy okrąg jest opisany na figurze), której wierzchołki leżą na okręgu. Figura opisana na okręgu ma wszystkie boki styczne do okręgu (wtedy mówimy, że okrąg jest wpisany w figurę).

Jedna z pierwszych konstrukcji jest następująca.

Zadanie 8

Skonstruujcie przy pomocy cyrkla i linijki okrąg wpisany w dany trójkąt.

5 Księga jedenasta

W tej księdze między innymi, Euklides formułuje (w języku geometrycznym) swój algorytm pozwalający znaleźć najmniejszy wspólny dzielnik dwóch liczb.

Mając dane liczby a i b, należy przedstawić je w postaci $a = cb + r$, gdzie r jest resztą z dzielenia a przez b. Wtedy zastosować algorytm ponownie dla b oraz r, dopóki $r = 0$, wtedy b jest największym wspólnym dzielnikiem.

Zadanie 9

Korzystając z algorytmu Euklidesa, znajdźcie nwd$(1886, 1610)$ w $\mathbb{Z}$ oraz takie liczby $x, y \in Z$, że $1886x + 1610y = \mathrm{nwd}(1886, 1610)$.

6 Księga dwunasta

Ta księga zajmuje się przede wszystkim miarami figur, ale następujące zadanie konstrukcyjne pojawiające się w księdze dwunastej wydaje się wyjątkowo interesujące.

Zadanie 10

Mając dane dwa współśrodkowe okręgi skonstruuj wielokąt foremny o parzystej liczbie boków wpisany w zewnętrzny okrąg tak, by jego krawędzie nie przecinały mniejszego okręgu.

7 Księga trzynasta

W księdze tej pojawia się następujące ładne twierdzenie.

Zadanie 11

Udowodnij, że jeśli a jest bokiem trójkąta równobocznego, zaś r jest promieniem okręgu na nim opisanego, to $a^2 = 3r^2$.

Oraz jeszcze takie, będące dowodem wielkiego kunsztu Euklidesa.

Zadanie 12

Udowodnijcie, że, gdy pięciokąt foremny o boku a jest wpisany w ten sam okrąg co sześciokąt foremny o boku b i dziesięciokąt foremny o boku c, to $a^2 = b^2 + c^2$.

8 Zadania dodatkowe

Zadanie 13

Zdefiniujcie co to jest kąt prosty.

Zadanie 14

Narysujcie rysunek, który dowodzi, że $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Zadanie 15

Jak przy pomocy cyrkla i linijki skonstruować okrąg opisany na danym trójkącie?

Zadanie 16

Niech będą dane okręgi o_1 i o_2 nie przecinające się, jeden na zewnątrz drugiego. Prosta k, jest styczna do o_1 i o_2 odpowiednio w punktach A i C, tak że okręgi są po jednej jej stronie. Druga prosta styczna l o takiej samej cesze jest styczna odpowiednio w punktach B i D. Odcinek AD przecina okręgi o_1 i o_2 odpowiednio w punktach E oraz F. Wykażcie, że $|AE| = |DF|$.

Zadanie 17

Na początki księgi siódmej Euklides definiuje a raczej daje intuicję czytelnikowi pojęcia takie jak jednostka, liczba, wielokrotność, parzysta liczba. Spróbujcie „zdefiniować" je sami a następnie porównajcie z definicjami Euklidesa i rozgryźcie ich znaczenie:

- jednostką jest ta, na mocy której każda z istniejących rzeczy może być nazwana jedną.
- liczba jest wielokrotnością złożoną z jednostek.
- większa liczba jest wielokrotnością mniejszej, jeśli może być zmierzona mniejszą.
- parzysta liczba to taka, która może być podzielona na dwie równe części.

Zadanie 18

Napisz funkcję w Pythonie, która stosując algorytm Euklidesa zwraca największy wspólny dzielnik dwóch danych liczb.

9 Proponowane zadania domowe

Zadania 19-22 (po 2 punkty)

Znajdź „Elementy" Euklidesa w Internecie. Niepełną polską wersję można znaleźć pod adresem `http://www.interklasa.pl/euklides/ksiegi.php`, natomiast pełne z obrazkami i objaśnieniami, ale po angielsku możesz znaleźć pod adresem `https://mathcs.clarku.edu/~djoyce/java/elements/toc.html`. Wybierz do 3 twierdzeń, o których nie rozmawialiśmy ani na wykładzie, ani na ćwiczeniach i opisz i udowodnij je swoimi własnymi słowami!