Geometryczne liczby.
3. „Elementy” Euklidesa
materiały do ćwiczeń

Projekt „Matematyka dla ciekawych świata”
spisał: Michał Korch

16 marca 2020

1 Geometria i postulaty Euklidesa – konstrukcje

Jak wiecie Euklides w swoim niesamowicie doskonałym dziele „Elementy” zaproponował pięć aksjomatów geometrii

1. Dowolne dwa punkty można połączyć prostą.
2. Dowolną prostą można przedłużyć nieograniczenie.
3. Dla danego odcinka można zaznaczyć okrąg o środku w dowolnym punkcie i promieniu równym odcinkowi.
4. Wszystkie kąty proste są równe.
5. Dwie proste, które przecinają trzecią w taki sposób, że suma kątów wewnętrznych po jednej stronie jest mniejsza od dwóch kątów prostych, przetną się i to właśnie z tej właśnie strony, jeśli się je odpowiednio przedłuży.

Następnie udowodnił mnóstwo, nie zawsze prostych, faktów geometrycznych.

Jednym z podstawowych problemów geometrycznych rozważanych przez Euklidesa i innych uczonych starożytności była możliwość konstrukcji różnych obiektów geometrycznych używając tylko cyrkla i linijki. Spróbujmy także wymyślić tego rodzaju konstrukcje.

Zadanie 1

Macie dany odcinek. Korzystając tylko z cyrkla i linijki znajdź środek odcinka, oraz skonstruujcie (narysujcie) kwadrat, którego dany odcinek jest bokiem.

Zadanie 2

Skonstruujcie teraz trójkąt równoboczny o boku będącym danym odcinkiem.

1.1 Zadanie 3

Jak wiecie umiemy skonstruować pięciokąt foremny. Załóżmy więc, że mamy dany pięciokąt foremny. Możecie też założyć, że mamy dany jego środek. Jak skonstruować piętnastokąt foremny?

Wskazówka: Wskazówka do tego zadania jest na końcu skryptu.

2 Twierdzenie Pitagorasa

Twierdzenie Pitagorasa, którego dowód znalazł się w „Elementach" Euklidesa orzeka, że w każdym trójkącie prostokątnym suma długości przyprostokątnych podniesionych do kwadratu jest równa długości przeciwprostokątnej podniesionej do kwadratu.

Zadanie 4

Niech będzie dany trójkąt prostokątny ABC o przeciwprostokątnej AB. Wysokość z wierzchołka C pada na podstawę AB w punkcie H. Udowodnijcie, że $|CH| = \sqrt{|AH||BH|}$.

Wskazówka: Wskazówki do tego zadania znajdziecie na końcu skryptu.

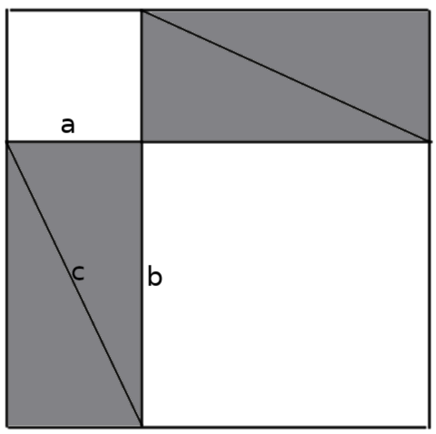
Zadanie 5

Macie dane dwa kwadraty. Skonstruujcie kwadrat o polu będącym sumą pól zadanych kwadratów.

Zadanie 6

Znamy obecnie wiele dowodów Twierdzenia Pitagorasa, w tym aż osiem dowodów przedstawił Euklides. Ale jak dowodził swojego twierdzenia Pitagoras? Tego nie wiemy. Niektórzy jednak domyślają się, że robił to w sposób zobrazowany poniższym rysunkiem.

Wskazówka: Wskazówkę do tego zadania znajdziecie na końcu.



3 Kąty w okręgu

Zadanie 7

Kolejnym znanym twierdzeniem, którego dowód można znaleźć w „Elementach” Euklidesa to twierdzenie o kątach w okręgu. Niech będzie dany okrąg i jego łuk. Każdy kąt wpisany w okrąg oparty na tym łuku ma tę samą miarę i jest ona równa mierze kąta pomiędzy cięciwą tego łuku a styczną (tzw. kąt dopisany). Udowodnijcie to twierdzenie.

Wskazówka: Wskazówki do tego zadania znajdziecie na końcu skryptu.

Zadanie 8

Udowodnijcie, że w takim razie, jeśli czworokąt da się wpisać w okrąg to suma jego przeciwległych kątów wynosi $180°$.

Co więc odnotujmy fakt, że warunek w zadaniu 8 można odwrócić – każdy czworokąt, którego przeciwległe kąty sumują się do $180°$ można wpisać w okrąg.

Zadanie 9

Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, taki że kąt przy wierzchołku C wynosi $60°$. Punkty D i E są rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów A i B na proste BC i AC. Punkt M jest środkiem boku AB. Wykażcie, że trójkąt DEM jest równoboczny.

Wskazówka: Wskazówki do tego zadania znajdziecie na końcu skryptu.

4 Potęga punktu

Jak wiecie, twierdzenie o potędze punktu, które dowiódł Euklides w 3. księdze „Elementów” mówi, że jeśli dany jest okrąg o oraz proste k i l przecinające się w punkcie P na zewnątrz okręgu o, takie że A i B to punkty przecięcia k i okręgu o, zaś l jest styczna do o w punkcie C, to:

$$|PC|^2 = |PA| \cdot |PB|.$$

Zatem jeśli mamy punkt P i okrąg o, to jakkolwiek go przetniemy prostą uzyskując punkty A i B, iloczyn długości $|PA||PB|$ będzie taki sam. Ten iloczyn nazywa się potęgą punktu P względem okręgu o.

Zadanie 10

Udowodnijcie to twierdzenie w przypadku, gdy prosta k przechodzi przez punkt O będący środkiem okręgu o.
Wskazówka: Wskazówki do tego zadania znajdziecie na końcu skryptu.

Zadanie 11

Udowodnijcie twierdzenie o potędze punktu w ogólnym przypadku, czyli gdy prosta k nie przechodzi przez środek okręgu.
Wskazówka: Wskazówka do tego zadania jest dostępna na końcu skryptu.

Zadanie 12

Załóżmy, że odcinki AB i CD przecinają się w punkcie P oraz $|AP||BP| = |CP||DP|$. Udowodnijcie, że A, B, C, D leżą na jednym okręgu.

5 Zadania dodatkowe

Zadanie 13

Skonstruujcie za pomocą cyrkla i linijki sześciokąt foremny.

Zadanie 14

Przeprowadźcie krok po kroku, cyrklem i linijką, konstrukcję Euklidesa pięciokąta foremnego, którą zobaczyliście podczas wykładu, patrz `https://youtu.be/s9WVS6eZkXI`.

Zadanie 15

Na bokach BC i AC trójkątna ostrokątnego ABC zbudowano, po zewnętrznej stronie, kwadraty, odpowiednio, $BCFE$ i $ACGH$. Udowodnijcie, że proste AF, BG i EH przecinają się w jednym punkcie.
Wskazówka: Wskazówka do tego zadania jest dostępna na końcu skryptu.

Zadanie 16

Niech prosta k przechodzi przez środek O okręgu o oraz niech C i D leżą na tym okręgu po jednej stronie prostej k. Poprowadźmy jeszcze proste styczne m i n do o odpowiednio w punktach C i D. Niech przecięcie k i m to A oraz przecięcie k i n to B, zaś przecięcie m i n to P. W końcu, niech H będzie spodkiem wysokości z wierzchołka P na podstawę AB w trójkącie ABP. Udowodnij, że kąty CHP i DHP są sobie równe.
Wskazówka: Wskazówka do tego zadania jest dostępna na końcu skryptu.

Zadanie 17

W dziele „O podziałach figur”, przypisywanym również Euklidesowi, formułuje on następujące zadanie. Niech będzie dany trójkąt ABC oraz punkt D leżący na boku AB. Poprowadź przez przez punkt D prostą tak, aby podzieliła trójkąt na dwie części o równych polach. Rozwiążcie to zadanie!
Wskazówka: Wskazówka do tego zadania jest dostępna na końcu skryptu!

Zadanie 18

Niech będą dane okręgi o_1 i o_2 nie przecinające się, jeden na zewnątrz drugiego. Prosta k, jest styczna do o_1 i o_2 odpowiednio w punktach A i C, tak że okręgi są po jednej jej stronie. Druga prosta styczna l o takiej samej cesze jest styczna odpowiednio w punktach B i D. Odcinek AD przecina okręgi o_1 i o_2 odpowiednio w punktach E oraz F. Wykażcie, że $|AE| = |DF|$.

6 Proponowane zadania domowe

Zadanie 19 (za 2 punkty)

Niech będzie dany prostokąt. Skonstruuj cyrklem i linijką kwadrat o polu równym polu tego prostokąta.

Wskazówka: Wskazówki do tego zadania znajdziecie na końcu skryptu.

Zadanie 20 (za 2 punkty)

Stwórz samodzielnie siatki wszystkich wielościanów foremnych.

Zadanie 21 (za 2 punkty)

Niech będą dane dwa okręgi przecinające się w punktach P i Q oraz punkt A leżący na pierwszym okręgu, różny od P i Q. Punkty przecięcia przedłużeń odcinków AP i AQ z drugim z okręgów, to odpowiednio B i C. Udowodnij, że styczna do pierwszego z okręgów w punkcie A jest równoległa do prostej BC.
Wskazówka: Wskazówka do tego zadania jest dostępna na końcu skryptu.

7 Wskazówki do zadań

Zadanie 4

Wskazówka: Skorzystajcie trzy razy z tw. Pitagorasa.

Zadanie 4

Wskazówka: Przestaw cztery widoczne na rysunku trójkąty, tak aby ich przeciwprostokątne tworzyły kwadrat.

Zadanie 7

Wskazówka: Dorysujcie odcinek między środkiem okręgu, a wierzchołkiem kąta i rozważcie kąty w powstałych trójkątach.

Zadanie 8

Wskazówka: Oblicz kąt CAD lub CBE, a następnie przyjrzyjcie się czworokątowi $ABED$. Czy można na nim opisać okrąg?

Zadanie 10

Wskazówka: Załóżmy bez straty ogólności, że punkt A leży bliżej punktu P niż punkt B. Połączcie odcinkiem O i C. Zauważcie, że $|OP|^2 = (|PA| + |OA|)^2 = |OA|^2 + |PA|(2|OA| + |PA|)$. Teraz zauważcie równość różnych promieni okręgu o oraz skorzystaj z Tw. Pitagorasa.

Zadanie 11

Wskazówka: Zaznaczcie punkt D będący środkiem odcinka AB oraz poprowadźcie odcinki OD, OP, OA i OC. Postępuj podobnie jak w poprzednim zadaniu, z tym że tym razem będziecie korzystać z Tw. Pitagorasa aż dwa razy!

Zadanie 15

Wskazówka: Zauważcie, że patrząc z punktu C, AF i BG są odcinkami obróconymi względem siebie o $90°$. Niech M będzie punktem ich przecięcia. Policz miary poszczególnych kątów składających się na kąt HME.

Zadanie 16

Wskazówka: Punkty C, P, D, H i O leżą na jednym okręgu. Dlaczego?

Zadanie 17

Wskazówka: Rozważcie najpierw prostą sytuację, gdy D jest środkiem odcinka AB.

Zadanie 19

Wskazówka: Skorzystaj z zadania 4.

Zadanie 21

Wskazówka: Skorzystaj z twierdzenia o kącie dopisanym w okręgu, a następnie zauważ, że czworokąt $BCQP$ jest wpisany w okrąg.

Zadania inspirowane: listami zadań Kuby Pawlikowskiego z zadań obozu Almu, zadaniami z „Delty" Joanny Jaszuńskiej, pomysłami Michała Korcha, listami zadań dr. J. Bednarczuka do Geometrii I i II, „O podziałach figur" przypisywane Euklidesowi.