Geometryczne liczby.
1. Planeta naturalna
materiały do ćwiczeń

Projekt „Matematyka dla ciekawych świata”
spisał: Michał Korch

12 luty 2020

1 Ciekawe języki

Liczby naturalne w naturalny sposób towarzyszą człowiekowi. W szczególności pojawiają się w każdym języku. Są jednak oczywiście na tyle uniwersalnym konceptem, że nawet nie znając danego języka, możemy pokusić się, żeby zrozumieć, o co chodzi.

Zadanie 1

Przypatrzcie się nazwom kolejnych liczb w języku papuaskiego plemienia Wedau:

1 tagogi

2 ruag’a

3 tonug’a

4 ruag’a-ma-ruag’a

5 ura-i-ga

6 ura-g’ela-tagogi

7 ura-g’ela-ruag’a

8 ura-g’ela-tonug’a

9 ura-g’ela-ruag’a-ma-ruag’a

10 ura-ruag’a-i-ga

Jakie prawidłowości widzicie? Dlaczego Waszym zdanie te, a nie inne, liczby zostały użyte do tworzenia kolejnych?

Zadanie 2

Poniżej zapisano kilka zależności o dodatnich liczbach całkowitych w języku ndom, który jest językiem z nowogwinejskiej rodziny językowej używanym przez ok. 1000 mieszkańców indonezyjskiej wyspy Yos Sudarso. W zdaniach nie występują liczby większe niż 20, niektóre słowa oznaczają operacje + i ·.

- mer abo meregh + thef > mer an thef
- mer abo thef + mer abo thonith = tondor
- mer an thef abo ithin + meregh = tondor abo thef
- thonith · thonith = mer an thef abo thonith
- mer + mer abo sas = mer an thef abo sas

1. Na tej podstawie podajcie co oznaczają następujące liczebniki:
   (a) thonith
   (b) meregh
   (c) mer an thef abo sas
   (d) tondor abo thef
   (e) mer abo ithin
2. Zapiszcie w języku ndom liczby 19 oraz 22.

Zadanie zostało zaczerpnięte z puli zadań Olimipady Ligwistyki Matematycznej.
Wskazówka: Zacznij od analizy ostatniej zależności. Co znaczą an, thef i abo?
Wskazówka: Następnie zanalizuj przedostatnią zależność. Można z niej wymyślić znaczenia słów thonith i mer.
Wskazówka: Teraz z drugiej zależności z łatwością odczytasz znaczenie liczebnika tondor!
Wskazówka: Pora zajrzeć do trzeciej zależności. Ile wynosi suma ithin i meregh? Jakimi liczebnikami mogą więc być? Zauważ, że meregh ma podobny człon do mer.
Wskazówka: Pozostaje do rozszyfrowania sas. Jakiej cyfry Ci brakuje?

2 Liczby pierwsze

Zadanie 3

Skonstruujcie sito Erastotenesa: wypiszcie na kartce liczby od 1 do 100 (na przykład w kwadracie 10 na 10). Wykreślcie liczbę 1. Następnie postępujcie iteracyjnie następująco, dopóki wszystkie liczby nie są wykreślone lub zakreślone w kółko:

- zakreślcie w kółko pierwszą nieskreśloną liczbę,
- wykreślcie wszystkie kolejne liczby przez nią podzielne.

Jakie liczby zostały zakreślone w kółko? Dlaczego?

Zadanie 4

Dowód Euklidesa, o tym, że jest nieskończenie wiele liczb pierwszych sugeruje przyjrzenie się liczbom będącym iloczynem początkowych n liczb pierwszych zwiększonym o jeden. Takie liczby nazywają się liczbami Euklidesa. Np. $2 \cdot 3 + 1 = 7$ (iloczyn dwóch początkowych liczb pierwszych zwiększony o jeden) jest liczbą pierwszą. Czy zawsze tak skonstruowana liczba (iloczyn trzech, czterech, itd. początkowych liczb pierwszych zwiększony o 1) jest pierwsza? Odpowiedź uzasadnijcie.

3 Ciąg Fibonacciego

Na wykładzie poznaliście ciąg Fibonacciego, czyli ciąg $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$, w którym każdy kolejny wyraz jest sumą dwóch poprzednich.

Zadanie 5

Stwórz podobny wzór rekurencyjny pasujący do ciągu:

$$0, 1, 1, 3, 5, 11, 21, \ldots.$$

Wymyśl zjawisko lub proces w świecie rzeczywistym, w której rolę odgrywa ten ciąg.

Zadanie 6

a) Policzcie kolejne ilorazy kolejnych liczb z (oryginalnego) ciągu Fibonacciego, czyli (używając kalkulatora) podzielcie drugą liczbę przez pierwszą, trzecią przez drugą, czwartą przez trzecią i tak dalej. Co obserwujecie?

b) Ten ciąg ilorazów jest coraz bliższy do tak zwanej złotej proporcji, która wynosi:

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Policzcie na kalkulatorze powyższą liczbę i sprawdźcie, że rzeczywiście wyrazy ciągu ilorazów są do niej coraz bliższe.

c) Liczba φ jest nazywana czasem „najprostszą niewymierną liczbą” lub „najbardziej niewymierną liczbą”. Liczby niewymierne to takie liczby, których nie da się zapisać w postaci p/q, gdzie obie liczby p, q są całkowite, przy czym $q \neq 0$. Inne przykłady liczb niewymiernych, poza φ, to chociażby π, czy też $\sqrt{2}$. Liczbami niewymiernymi jeszcze się zajmiemy w przyszłości, ale teraz spróbujcie udowodnić, że φ jest rzeczywiście niewymierna.
Wskazówka: Wskazówki do tego zadania znajdziecie na końcu skryptu.

d) Wiemy już, że φ jest liczbą niewymierną. Dlaczego jest więc „najbardziej niewymierną”? Otóż każdą liczbę można rozłożyć w ułamek łańcuchowy. Co to ułamek łańcuchowy? Przyjrzyjmy się na przykładzie. Np.:

$$\frac{43}{5} = 8 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{2}}},$$

co łatwo sprawdzić, sprowadzając kolejne dodawania do wspólnego mianownika. Tymczasem liczby niewymierne rozpisują się w nieskończone ułamki łańcuchowe, czyli:

$$\square + \cfrac{1}{\square + \cfrac{1}{\square + \cfrac{1}{\square + \frac{1}{\dots}}}}.$$

Co trzeba wstawić za $\square$, żeby dostać liczbę φ? Najprostsza możliwa liczba jest najlepsza! Właśnie dlatego φ jest „najprostszą niewymierną liczbą” lub „najbardziej niewymierną liczbą”. Sprawdź kolejne przybliżenia obcinając ułamek łańcuchowy w którymś miejscu.

4 Indukcja matematyczna

Indukcja matematyczna to bardzo przydatna metoda dowodzenia twierdzeń w jakiś sposób związanych z liczbami naturalnymi.

O co chodzi? O bardzo prosty i bardzo silny model wnioskowania. Jeśli mamy ciąg kilku baterii (ustawionych od lewej do prawej) ustawionych za sobą i wiemy dwie rzeczy:

- pierwsza z nich po lewej ma minus,
- każda kolejna jest ustawiona dobrze, czyli kolejna bateria ma po lewej stronie znak przeciwny do znaku poprzedniej baterii z prawej strony,

to od razu wiemy, że wszystkie baterie w ciągu po lewej stronie mają minus. Oczywiste, nie? Te dwa elementy wiedzy nazywamy pierwszym i drugim krokiem indukcyjnym.

Jak zasadę indukcji sformułować ogólnie? Mamy daną jakąś tezę zależną od liczby n (w przykładzie będzie to: n-ta bateria ma po lewej stronie minus) i chcemy udowodnić, że zachodzi dla każdej liczby naturalnej n. Zasada indukcji mówi, że wystarczy, że pokażemy, że prawdziwe są dwa fakty:

- teza jest prawdziwa dla $n = 0$ (pierwszy krok)
- prawdziwa jest następująca implikacja: jeśli teza jest prawdziwa dla $n = k$, to jest też prawdziwa dla $n = k + 1$ (krok indukcyjny).

Na przykład, pokażmy, że dla każdej liczby naturalnej n, prawdziwe jest stwierdzenie, że suma kolejnych liczb naturalnych od 0 do n wynosi $\frac{(n+1)n}{2}$

W pierwszym kroku sprawdzamy dla $n = 0$. $0 = 0$, ok.
Drugi krok. Załóżmy, że $1 + \ldots + k = \frac{(k+1)(k)}{2}$. Teza: $1 + \ldots + k + (k + 1) = \frac{(k+2)(k+1)}{2}$. Rzeczywiście korzystając z założenia: $1 + \ldots + k + k + 1 = \frac{(k+1)(k)}{2} + (k + 1) = \frac{(k+1)(k)+2(k+1)}{2} = \frac{(k+2)(k+1)}{2}$. OK. $\square$

Zadanie 7

Udowodnij korzystając z zasady indukcji matematycznej, że dla każdej liczby naturalnej n, 3 jest dzielnikiem liczby $7^n - 1$.

Zadanie 8

Okazuje się, że aby policzyć n-tą liczbę w ciągu Fibonacciego, nie trzeba koniecznie liczyć wszystkich poprzednich. Zaskakujące może się bowiem wydać, że n-ta liczba Fibonacciego to

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Przy okazji zauważmy, że i tu złota proporcja odgrywa istotną rolę! Udowodnijcie ten wzór korzystając z zasady indukcji matematycznej!

Wskazówka: Tutaj w kroku indukcyjnym trzeba będzie założyć, że wzór działa nie tylko dla jednej, ale dla dwóch kolejnych liczb, $k-1$ i k. Dlatego w pierwszym kroku indukcyjnym też trzeba sprawdzić dwie pierwsze liczby: $n=0$ i 1.

5 Aksjomaty arytmetyki

Rozważmy teraz aksjomaty (czyli podstawowe zasady, z których wynika każda inna) arytmetyki na liczbach naturalnych. Te aksjomaty sformułował Peano i są one następujące (opisują 0, operacje + oraz $\cdot$ i operację nast, którą należy rozumieć jako +1, używają także stałej 0):

1. dla każdego n, nie jest prawdą, że $\mathrm{nast}(n) = 0$,
2. dla każdych n, m, jeśli $\mathrm{nast}(n) = \mathrm{nast}(m)$, to $n = m$,
3. dla każdego n, $n + 0 = n$,
4. dla każdych n, m, $\mathrm{nast}(n+m) = n + \mathrm{nast}(m)$,
5. dla każdego n, $n \cdot 0 = 0$,
6. dla każdych n, m, $n \cdot \mathrm{nast}(m) = n \cdot m + n$

I jest jeszcze jeden kluczowy aksjomat (tak naprawdę „schemat aksjomatów") zwany indukcją matematyczną, który poznaliście przed chwilą.

Inaczej mówiąc do naszego zbioru aksjomatów dodajemy dla każdej własności $\varphi(n)$ następujący aksjomat:

7. Jeśli $\varphi(0)$ oraz dla każdego k, z tego że $\varphi(k)$ wynika, że $\varphi(\mathrm{nast}(k))$, to dla każdego n, zachodzi $\varphi(n)$.

Spróbujmy zatem pokazać jakiś prosty fakt dotyczący arytmetyki, korzystając tylko i wyłącznie z aksjomatów Peano. Na przykład udowodnijmy, że dla każdej liczby naturalnej n, $n = 0 + n$ (zauważcie, że to nie to samo, co aksjomat trzeci, bo przecież nie udowodniliśmy, że dodawanie jest przemienne!).

Skorzystamy z indukcji matematycznej:

- teza dla $n = 0$ brzmi $0 = 0 + 0$ i jest prawdziwa na podstawie aksjomatu trzeciego.
- udowodnijmy teraz, że z tego, że zachodzi $k = 0 + k$ wynika, że zachodzi $\mathrm{nast}(k) = 0 + \mathrm{nast}(k)$. Załóżmy zatem, że dla pewnego k, mamy $k = 0 + k$. Wtedy $\mathrm{nast}(k) = \mathrm{nast}(0+k)$, co z aksjomatu czwartego jest równe $0 + \mathrm{nast}(k)$, co kończy dowód kroku indukcyjnego.

I na mocy aksjomatu indukcji kończy dowód tego, że dla każdej liczby naturalnej n, $n = 0 + n$.

Zadanie 9

Udowodnij, korzystając tylko z aksjomatów Peano, ża dla każdych liczb naturalnych m, n, mamy $\text{nast}(m) + n = \text{nast}(m + n)$.
Wskazówka: Niech m będzie ustaloną liczbą przez cały dowód. Rozpatrz przez indukcję tezę dla n, że $\mathit{nast}(m) + n = \mathit{nast}(m + n)$.

Zadanie 10

Udowodnij, korzystając jedynie z aksjomatów Peano oraz dwóch do tej pory udowodnionych faktów, że dodawanie liczb naturalnych jest przemienne.

Matematyka Majów

Majowie liczyli w systemie dwudziestkowym i używali do tego kamyków i patyczków. Każdy kamień oznaczał 1, zaś patyczek 5, ale na jednej pozycji mogło być tylko maksymalnie 4 kamienie i 3 patyczki. Były kolejne pozycje: jedności, dwudziestek, czterysetek itd. (analogicznie do naszych jedności, dziesiątek, setek,. . .). Wobec tego, np. liczba $137 = 6{\cdot}20+17$ byłaby oznaczona kamieniem i patyczkiem w pozycji dwudziestek $((1 + 5) \cdot 20)$ oraz dwoma kamieniami i trzema patyczkami w pozycji jedności $(2+3{\cdot}5)$, przy czym patyczki układano poziomo na danej pozycji, a nad nimi układano kamienie w kolejnym rządku (patrz rysunek).

Wprowadzono też muszelki do oznaczania pustych pozycji (zer). Czasem również zamiast układać, po prostu rysowano patyczki jako kreski, a kamienie jako kropki.

Zadanie 11

a) Zapiszcie w ten sposób liczby: $3, 12, 21, 108, 444, 8063$.

b) Dzięki użyciu kamieni i patyczków łatwo jest dodać dwie liczby do siebie. Ułóżcie liczby 59 i 362 jedna nad drugą i zsuńcie wszystkie kamienie i patyczki na dół. Następnie Jeśli liczba kamieni przekracza gdzieś 4 trzeba pięć z nich wymienić na nowy patyczek. Cztery patyczki zamieniają się na kamień na wyższej pozycji. Odczytajcie wynik dodawania po odpowiednich zamianach.

Zagadka na koniec

Zadanie 12

Na pirackim statku znajduje się skarb złożony z 10 dukatów (dukaty są niepodzielne). Na statku jest też 5 piratów: Alojzy, Bonifacy, Cezary, Dionizy i Eustachy. Hersztem bandy jest zawsze osoba o pierwszym imieniu w kolejności alfabetycznej. Piraci dzielą skarb pomiędzy siebie następującą piracko-demokratyczną metodą. Herszt bandy proponuje podział i ten podział jest

głosowany. Jeśli za jest większość (ponad połowa) piratów, podział dochodzi do skutku. W przeciwnym wypadku, herszt jest wyrzucany do rekinów za burtą, kolejny (alfabetycznie) pirat zostaje hersztem i procedura zaczyna się od początku w mniejszym gronie. Każdy pirat chce zyskać możliwie dużo, ale jeśli nie ma to wpływu na zysk, każdy zagłosuje tak, żeby herszt został wyrzucony za burtę. Każdy pirat również woli nic nie dostać ze skarbu niż wylądować za burtą. Jaki podział skarbu zaproponuje herszt Alojzy?
Wskazówka: Wskazówkę do tego zadania znajdziecie na końcu!

Zadania dodatkowe

Zadanie 13

Bislama to powstały na bazie angielszczyzny kreolski język używany na Vanuatu, gdzie jest obok angielskiego i francuskiego językiem urzędowym. Poniżej znajduje się zapisana w bislamie zagadka logiczna dotycząca Samuela, Rika, Pita i Zazi – mieszkańców czterech stojących w linii prostej domów ponumerowanych kolejno liczbami od 1 do 4. Każdy dom ma inny kolor: niebieski, zielony, czarny lub czerwony. Ich mieszkańcy wykonują cztery różne zawody: policjanta, ministra, żołnierza i lekarza. Każde z nich ma jedno zwierzę: kota, psa, szczura lub węża, i pije tylko jeden rodzaj napoju: herbatę, kawę, sok lub wodę.

(a) Zazi hem i stap slip long nambatu haos.

(b) Nambatri haos we i blufala mo nambafo haos we i redfala.

(c) Rik hem i stap klosap long redfala haos.

(d) Man blong rat i stap klosap long haos blong man blong snek.

(e) Samuel hem i stap slip long grinfala haos mo hem i gat wan puskat.

(f) Wan man i stap dring wota mo hem i stap klosap long nambatri haos.

(g) Polisman hem i stap klosap long haos blong man blong snek.

(h) Wan man hem i stap slip long grinfala haos mo hem i stap dring ti.

(i) Pit blong snek i stap dring wota.

(j) Wan man hem i stap dring kafe mo hem i stap klosap long docta.

(k) Zazi hem i soldia.

(l) Rik hem i stap dring jus.

1. Odpowiedzcie na pytanie z zagadki: Wanem nem blong man we i minista? (Jak ma na imię osoba, która jest ministrem?)
2. Przetłumaczcie na polski zdania (d) i (f).
3. W którym domu mieszka wąż? W którym domu pije się kawę? W którym domu mieszka kot?

Rozwiążcie to zadanie nie korzystając z Internetu! Zadanie zostało zaczerpnięte z puli zadań Olimpiady Lingwistyki Matematycznej.

Zadanie 14

Jaka jest najmniejsza liczba naturalna, która ma:

a) dokładnie 2 dzielniki?

.

b) dokładnie 3 dzielniki?

.

c) dokładnie 4 dzielniki?

.

d) dokładnie 5 dzielników?

.

e) dokładnie 6 dzielników?

.

Zadanie 15

Zmodyfikujmy konstrukcję z zadania 5. w takim razie definiując tzw. liczby Sylvestra. Pierwsza liczba Sylvestra to 2 ($s_1 = 2$). Kolejna liczba Sylvestra to iloczyn poprzednich liczb Sylvestra zwiększony o 1 (czyli $s_2 = s_1 + 1 = 2 + 1 = 3$, $s_3 = s_1 \cdot s_2 + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$, itd.). Czy każda liczba Sylvestra jest liczbą pierwszą? Odpowiedź uzasadnijcie.

Zadanie 17

Udowodnij, korzystając jedynie z aksjomatów Peano oraz tezy udowodnionej w zadaniu 9 (łączność dodawania), że dodawanie liczb naturalnych jest rozdzielne względem mnożenia (dla każdych liczb naturalnych p, q, r, $(p \cdot (q + r) = (p \cdot q) + (p \cdot r))$.

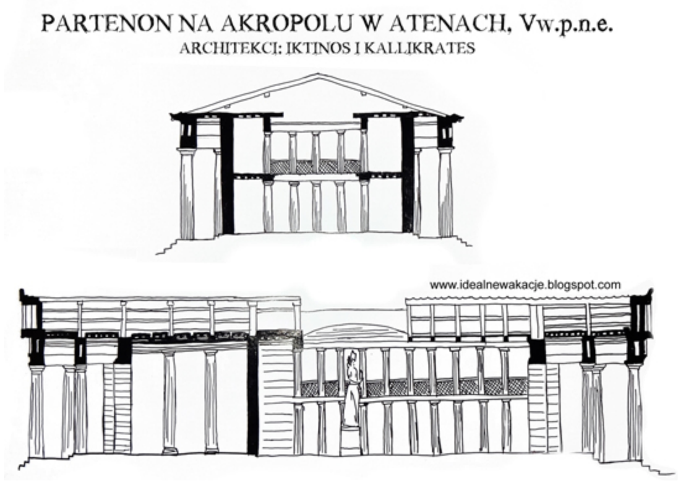
Zadanie 18

Udowodnij, korzystając jedynie z aksjomatów Peano, że dodawanie liczb naturalnych jest łączne (dla każdych liczb naturalnych p, q, r, $p + (q + r) = (p + q) + r)$.

6 Proponowane zadania domowe

Zadanie 19 (1 punkt)

a) Wszystko wskazuje na to, że już starożytni Grecy znali złotą proporcję. Zauważyli także, że proporcje z nią związane wydają się naturalne i przyjemne dla ludzkiego oka. Poniżej rysunek przedstawiający rekonstrukcję Partenonu – słynnej głównej świątyni na ateńskim Akropolu. Posługując się linijką, kalkulatorem i nożyczkami stwórzcie z kartki papieru kilka odpowiednich prostokątnych wzorców oraz znajdźcie możliwie dużo par długości elementów architektonicznych na rysunku Partenonu, które są względem siebie w złotej proporcji.



b) Przez kolejne wieki to właśnie złote proporcje wyznaczały kanon piękna w architekturze. Na kolejnym rysunku znajdziecie fasadę katedry Norte Dame w Paryżu. Które pary odcinków są właśnie w takiej proporcji?

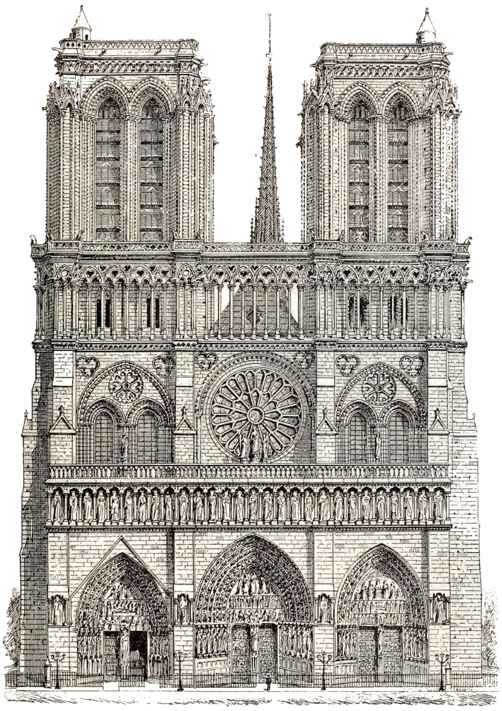


Fig. 29. — Notre-Dame de Paris. Façade principale.

Uwaga: powyższe rysunki znajdziecie też na stronie naszych zajęć w materiałach z ćwiczeń!

Zadanie 20 (2 punkty)

Udowodnij korzystając z zasady indukcji matematycznej, że dla każdej liczby naturalnej n, liczba $11^n - 4^n$ jest podzielna przez 7.

Zadanie 21 (3 punkty)

Udowodnij, korzystając jedynie z aksjomatów Peano oraz przemienności dodawania, którą udowodniliśmy w zadaniu 8, oraz łączności dodawania (patrz zadanie 9), że mnożenie liczb naturalnych jest przemienne (dla każdych liczb naturalnych n, m, $(m \cdot n = n \cdot m)$.
Wskazówka: Postępuj podobnie jak przy dowodzeniu przemienności dodawania – zanim zabierzesz się za właściwy dowód udowodnij dla mnożenia fakty podobne do tych, które dla dodawania zostały udowodnione na początku rozdziału trzeciego oraz w zadaniu siódmym.

7 Wskazówki do zadań

Zadanie 6

Załóżmy przeciwnie, że są takie liczby całkowite p, q, że $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{p}{q}$. Przekształćcie to równanie tak, żeby nie mieć w nim pierwiastka. Czyli w takim razie 5 jest ilorazem kwadratów dwóch liczb całkowitych: $a^2 = (2p-q)^2$ oraz q^2. Rozważcie teraz podzielność przez potęgi piątki licznika i mianownika.

Zadanie 12

Gdyby na statku byli tylko Dionizy i Eustachy, hersztem byłby Dionizy. Cokolwiek zaproponuje, Eustachy zagłosuje przeciw i wyrzuci go zgodnie z zasadami na burtę, bo przecież zostając sam będzie miał cały skarb. Pomyśl, co, wiedząc o tym, zaproponuje Cezary, jeśli na statku byliby Cezary, Dionizy i Eustachy.