Matematyczna wieża Babel.
6. Nieskończoność i myślaki
materiały do ćwiczeń

Projekt „Matematyka dla ciekawych świata”
spisał: Michał Korch

23 maja 2019

1 Nieskończoność

Zbiory A i B są równoliczne (co oznaczane jest jako $|A| = |B|$), jeśli elementy zbioru A można ustawić w pary ze wszystkimi elementami zbioru B, tak że każdy z elementów jest w dokładnie jednej parze.

Wykonując myślowy eksperyment z hotelem Hilberta, ustawialiśmy w pary nieskończenie wiele jednoosobowych pokoi hotelu ponumerowanych liczbami naturalnymi (poczynając od zera) w pary z elementami zbioru gości. Zastanawialiśmy się nad zakwaterowaniem nowego gościa (nazwijmy go gościem -1) w sytuacji, w której wszystkie nieskończenie wiele pokoi jest zajętych (nazwijmy gościa, który jest w pokoju numer n, gościem n). Okazało się, że nowego gościa możemy dokwaterować mimo zajętości wszystkich pokoi, przesuwając każdego z dotychczasowych gości do pokoju o numerze o jeden większym. Wtedy pokój zerowy będzie pusty i możemy tam zakwaterować gościa -1. Rzeczywiście przyporządkowaliśmy w pary elementy zbioru gości $\{-1, 0, 1, 2, \ldots\} = \{-1\} \cup \mathbb{N}$ z elementami zbioru pokoi $\{0, 1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N}$, przyporządkowując gościowi n pokój o numerze $n + 1$. Inaczej mówiąc, dowiedliśmy, że zbiory $\{-1\} \cup \mathbb{N}$ oraz $\mathbb{N}$ są równoliczne, co zapisujemy $|\mathbb{N} \cup \{-1\}| = |\mathbb{N}|$.

Zadanie 1

To przeprowadźmy jeszcze jeden eksperyment myślowy z tym hotelem. Załóżmy, że do pustego hotelu zgłaszają się do niego nieskończona grupa kobiet i nieskończona grupa mężczyzn. Jeśli recepcjonista jest dobrze wychowany, prawdopodobnie wpuści do hotelu najpierw kobiety. Ale niestety jeśli tak zrobi i nie pomyśli – zajmą one wszystkie nieskończenie wiele pokoi i nieskończona grupa mężczyzn zostanie na lodzie. Czy można postąpić inaczej? A jeśli tak, to czy z tego wynika (jeśli tak, to w jaki sposób) że zbiory liczb naturalnych i całkowitych są równoliczne?

Na wykładzie sprawdziliśmy jednak, że nie wszystkie nieskończone zbiory są równoliczne ze zbiorem liczb naturalnych. Na przykład, liczby rzeczywiste nie są. Poszukajmy innych tego typu przykładów.

Zadanie 2

Okazuje się, że zbiór wszystkich nieskończonych ciągów zero-jedynkowych też ma tę własność, że nie jest możliwe zakwaterowanie wszystkich jego elementów w hotelu Hilberta. Spróbujcie

to udowodnić!
Wskazówka: Należy przeprowadzić dowód „nie wprost". Więcej wskazówek znajdziecie na końcu tego skryptu.

Słynne twierdzenie Cantora mówi, że podzbiorów dowolnego zbioru jest więcej niż jego elementów. Sprawdźmy najpierw, że rzeczywiście tak jest dla skończonych zbiorów.

Zadanie 3

Ile jest podzbiorów dowolnego zbioru n-elementowego? Dlaczego?

Zadanie 4

Okazuje się, że to jest też prawda, dla zbiorów nieskończonych. Udowodnijcie, że podzbiorów zbioru liczb naturalnych jest więcej niż samych liczb naturalnych. To znaczy, że wszystkich podzbiorów nie da się ustawić w pary z liczbami naturalnymi!
Wskazówka: Ale może da się ustawić z czymś innym? Więcej wskazówek na końcu skryptu!

2 Powrót na Wyspę Rycerzy i Łotrów

Wróćmy teraz na znaną już Wam Wyspę Rycerzy i Łotrów. Przypomnijmy, że wyspa ta jest zamieszkała tylko przez dwa typy osób: właśnie rycerzy i łotrów. Z tym że rycerze mają to do siebie, że zawsze mówią prawdę, natomiast łotry – zawsze kłamią. Chcąc porządnie zbadać socjologię i etnografię wyspy będziecie musieć nieraz rozpoznać, czy ktoś jest rycerzem, czy też łotrem.

Zadanie 5

Spotykacie dwóch mieszkańców wyspy. Jeden z nich mówi: „co najmniej jeden z nas jest łotrem". Co możecie o nich wywnioskować?

Zadanie 6

Spotykacie trzech mieszkańców wyspy: Alojzego, Bonifacego i Cezarego. Na pytanie „Czy jesteś rycerzem, czy łotrem?" Alojzy odpowiada, ale tak niewyraźnie, że nic nie zrozumieliście Pytacie więc Bonifacego: „Co powiedział Alojzy?". Na co Bonifacy: „Alojzy powiedział, że jest łotrem." Na to Cezary wypalił: „Nie wierz Bonifacemu, on kłamie!". Co możecie powiedzieć o tych mieszkańcach?

Zadanie 7

Stoicie na rozdrożu dróg, jedna prowadzi w lewo, a jedna w prawo. Wiecie, że jedna z nich prowadzi do Szczęścia a druga do Śmierci. Przed każdą z dróg stoi mieszkaniec Wyspy. Załóżmy, że wiecie, że jeden z nich jest łotrem a drugi rycerzem. Jak dowiedzieć się która droga prowadzi do Szczęścia zadając tylko jedno pytanie?

Zadanie 8

Spotykacie grupę 6 mieszkańców wyspy: Alojzego, Benjamina, Celinę, Dionizego, Euzebię, i Felicjana.

- Celina mówi: Alojzy kłamie.
- Alojzy mówi: Beniamin mówi prawdę.
- Beniamin mówi: Celina kłamie.
- Beniamin mówi: Celina nie jest tego samego typu, co ja.
- Euzebia mówi: Dionizy kłamie.
- Felicjan mówi: Euzebia mówi prawdę.
- Beniamin mówi: Euzebia nie jest tego samego typu, co ja.

Co umiecie o nich powiedzieć?

3 Rozmyślania o myślakach

Zbliżamy więc się nieuchronnie do świata logiki. Ten świat wygodnie nam będzie zwiedzić razem z myślakami – stworzonkami wyobrażonymi przez Raymonda Smullyana, które myślą w bardzo precyzyjny sposób. Będziemy wiec określać precyzyjnie coraz bardziej interesujące style myślenia i wnioskowania.

Zacznijmy od najprostszego typu myślaka. Myślak podstawowy po pierwsze wierzy we wszystkie tautologie. Tautologia to takie zdanie, które zawsze jest prawdziwe, niezależnie od okoliczności. Na przykład, jeśli p to dowolne zdanie logiczne, to zdanie „p lub nie p” jest tautologią. Myślak wierzy we wszystkie tego typu zdania. Po drugie, myślak podstawowy ma tę cechę, że jeśli wierzy w dowolne zdanie p oraz w zdanie „z p wynika q”, to również uwierzy w zdanie q.

O myślaku powiemy, że jest sprzeczny, jeśli wierzy w pewne sprzeczne zdanie (np. w zdanie „nie jest prawda, ze p lub nie p”, takie zdanie będziemy oznaczać $\perp$).

Zadanie 9

Udowodnijcie, że sprzeczny myślak podstawowy ma tę cechę, że wierzy absolutnie we wszystko.

Warto jeszcze zwrócić uwagę na jedną sprawę. Nigdy do tej pory nie powiedzieliśmy, że jeśli myślak wierzy w jakieś zdanie p, to wierzy, że w nie wierzy. To jest związane z pewną samoświadomością, której myślak podstawowy może nie posiadać. Ta cecha będzie nam jednak przydatna w dalszych rozważaniach. Dla każdego zdania p, zdanie „myślak wierzy w p” oznaczmy jako Mp.

Powiemy na przykład, że myślak wie o myśleniu, jeśli dla każdych zdań p i q wierzy on, że jeśli uwierzy w p oraz także w zdanie $p \to q$, to uwierzy też w q. Inaczej mówiąc, myślak wie o myśleniu, jeśli ma świadomość o regule rządzącej jego rozumowaniem. Jeszcze inaczej to formułując, myślak taki wierzy w każde zdanie postaci $(Mp \wedge M(p \to q)) \to Mq$.

Zadanie 10

Udowodnijcie, że myślak podstawowy wie o myśleniu wtedy i tylko wtedy, gdy wierzy we wszystkie zdania postaci $M(p \to q) \to (Mp \to Mq)$.
Wskazówka: Na końcu skryptu.

To jeszcze jednak nie wszystko. Dodajmy kolejny element samoświadomości myślakom. Powiemy, ze myślak, który wie o myśleniu, jest normalny, jeśli za każdym razem, gdy wierzy w zdanie p, wierzy też w to, że wierzy w p. Inaczej mówiąc, jeśli wierzy w p, to również wierzy w Mp.

Zadanie 11

Udowodnijcie, że każdy normalny myślak, jeśli uwierzy w pewne zdanie postaci $p \to q$ to uwierzy też w zdanie $Mp \to Mq$.

No i w końcu o normalnym myślaku będziemy mówić, że jest samoświadomy, jeśli wie, że jest normalny. Czyli jeśli dla każdego zdania p, wierzy, że jeśli uwierzy w p, to uwierzy, że uwierzy w p. Inaczej mówiąc, wierzy w każde zdanie postaci $Mp \to M(Mp)$. O ile myślak normalny nie musi koniecznie wierzyć w to, że jest normalny (ta cecha to właśnie samoświadomość), to okazuje się, ze myślaki samoswiadome, nawet wiedza, że są samoswiadome!

Zadanie 12

Udowodnijcie, że każdy samoświadomy myślak wie, że jest samoświadomy.

4 Zadania dodatkowe

Zadanie 13

Udowodnijcie, że przedział otwarty $(0,1)$ jest równoliczny ze zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych.

Zadanie 14

Udowodnijcie zatem, że przedział domknięty $[0,1]$ jest równoliczny ze zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych.
Wskazówka: Pomyślcie, jak w tym przedziale „zanurzyć” hotel Hilberta, a następnie przesuńcie gości o dwa pokoje.

Zadanie 15

Czy można rozwiązać problem z zadania 7 w sytuacji, w której nie wiadomo, czy spotkani mieszkańcy są różnych typów?

Zadanie 16

Na stronie https://dmackinnon1.github.io/knaves/ znajdziecie generator zagadek o Wyspie Rycerz i Łotrów. Miłej zabawy!

Zadanie 17

Pokażcie, że dowolny myślak, który wie o myśleniu, dla dowolnych zdań p, q i r:

a) uwierzy w $M(p \to (q \to r)) \to (Mp \to (Mq \to Mr))$,

b) jeśli kiedykolwiek uwierzył w $M(p \to (q \to r))$, to uwierzy w $Mp \to (Mq \to Mr)$.

Zadanie 18

Pokażcie, że myślak normalny, który wierzy w zdanie $p \to (q \to r)$ uwierzy także w zdanie $Mp \to (Mq \to Mr)$.

Wskazówki do zadań

Zadanie 2

Wskazówka:

1. *Załóżmy, że takie zakwaterowanie jest możliwe. Istnieje zatem lista kwaterunkowa, w której w zerowym wierszu jest nieskończony ciąg zero-jedynkowy zakwaterowany w zerowym pokoju, w pierwszym – zakwaterowany w pierwszym, itd.*

2. *Rozważ ciąg „na przekątnej" czyli złożony z zerowego wyrazu zerowego ciągu, pierwszego wyrazu pierwszego ciągu, itd.*

3. *Rozważ teraz ciąg dokładnie przeciwny do tego opisanego wyżej. Czy może on być zakwaterowany w którymś z pokojów?*

Zadanie 4

Wskazówka: Wymyślcie jak zakodować dowolny podzbiór zbioru liczb naturalnych nieskończonym ciągiem zero-jedynkowym!

Zadanie 10

Wskazówka: Jak mają się do siebie zdania $(p \wedge q) \to r$ oraz $q \to (p \to r)$?