

# Matematyczna wieża Babel.

## 1. Wyprawa na Wyspę Rycerzy i Łotrów

### materiały do ćwiczeń

Projekt „Matematyka dla ciekawych świata”  
spisał: Michał Korch

21 luty 2019

Większość zadań w poniższym cyklu jest inspirowana książkami Raymonda Smullyana.

## 1 Krówki na początek!

### Zadanie 1

Oferujemy Wam dwie krówki. Jeśli wypowiedzie zdanie prawdziwe dostaniecie co najmniej jedną z nich. Jeśli wypowiedzie zdanie fałszywe, nie dostaniecie żadnej nagrody. Czy możecie wypowiedzieć takie zdanie, żeby dostać obie krówki? Jakie to zdanie?

*Wskazówka: Powiedzcie zdanie, które odnosi się do otrzymania krówek. Co może się zdarzyć, jeśli powiecie, na przykład, „dostaniemy dokładnie jedną krówkę”? Przetestujcie różne tego typu zdania i ich koniunkcje.*

## 2 Na Wyspie Rycerzy i Łotrów

Udajecie się na ekspedycję na zadziwiającą Wyspę Rycerzy i Łotrów. Wyspa ta jest zamieszkała tylko przez dwa typy osób: właśnie rycerzy i łotrów. Z tym że rycerze mają to do siebie, że zawsze mówią prawdę, natomiast łotry – zawsze kłamią. Chcąc porządnie zbadać socjologię i etnografię wyspy będziecie musieć nieraz rozpoznać, czy ktoś jest rycerzem, czy też łotrem.

### Zadanie 2

W ramach przygotowań do wyprawy w jednej z książek opisujących wyspę natrafiliście na następujące stwierdzenie. Jeśli na wyspie rycerzy lub łotrów dowolny mieszkaniec powie zdanie zaczynające się od słów „jeśli jestem rycerzem, to”, można mieć pewność, że część zdania które powie po słowie „to” na pewno zachodzi. Udowodnijcie, że rzeczywiście tak jest! Czy coś wiadomo o osobie mówiącej to zdanie?

*Wskazówka: Przypomnijcie sobie kiedy zdanie będące implikacją jest prawdziwe. W szczególności w przypadku, gdy pierwsza część takiego zdania jest fałszywa.*

### Zadanie 3

A co jeśli „jeśli... to...” zmienić na „...wtedy i tylko wtedy, gdy...”? Co wtedy można powiedzieć o prawdziwości drugiej części zdania? Czy można powiedzieć coś o osobie mówiącej to zdanie?

*Wskazówka: A więc okazuje się, że nie zawsze trzeba wiedzieć, czy osoba mówiąca jest łotrem, czy rycerzem, żeby się czegoś od niej dowiedzieć.*

### Zadanie 4

No dobrze, czyli gdy usłyszycie od tubylca wyspy zdanie „jestem rycerzem wtedy i tylko wtedy, gdy na wyspie jest złoto”, to wiecie już, czy na wyspie jest złoto. A z jakiego zdania wypowiedzianego przez tubylca wyspy moglibyście wydedukować, że jeśli jest on rycerzem, to na wyspie jest złoto, a jeśli jest on łotrem, to może złoto jest, a może go nie ma?

*Wskazówka: Użyj słowa „i”.*

## 3 Tautologie i sprzeczności

Bardziej skomplikowane zdania można badać produkując tabele z wartościami logicznymi poszczególnych jego elementów rozważając wszystkie przypadki. Załóżmy zatem, że zdanie  $p$  to „na wyspie jest złoto”, zaś zdanie  $q$  oznacza „na wyspie jest srebro”. Niech ponadto  $r$  oznacza, że na wyspie jest platyna. Nie wiemy z góry, czy na wyspie jest którekolwiek z tych złóż szlachetnych metali.

### Zadanie 5

Czy można coś powiedzieć o tubylcu, który wypowiada zdanie  $(p \wedge (q \rightarrow r)) \wedge (r \wedge \neg p)$ ?

$p$	$q$	$r$	$q \rightarrow r$	$p \wedge (q \rightarrow r)$	$\neg p$	$r \wedge \neg p$	całe zdanie
<i>tak</i>	<i>tak</i>	<i>tak</i>					
<i>tak</i>	<i>tak</i>	<i>nie</i>					
<i>tak</i>	<i>nie</i>	<i>tak</i>					
<i>tak</i>	<i>nie</i>	<i>nie</i>					
<i>nie</i>	<i>tak</i>	<i>tak</i>					
<i>nie</i>	<i>tak</i>	<i>nie</i>					
<i>nie</i>	<i>nie</i>	<i>tak</i>					
<i>nie</i>	<i>nie</i>	<i>nie</i>					

Zdanie, które niezależnie od wartości logicznych zmiennych jest prawdziwe, czyli zdanie które niezależnie od tego jakie mamy surowce, może powiedzieć tylko rycerz, nazywamy tautologią.

Zdanie, które niezależnie od wartości logicznych zmiennych jest fałszywe, czyli zdanie które niezależnie od tego jakie mamy surowce, może powiedzieć tylko łotr, nazywamy sprzecznością.

### Zadanie 6

A czy coś można powiedzieć o tym jakie szlachetne metale są na wyspie, jeśli usłyszemy zdanie  $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)$  wypowiedziane przez łotra?

## Zadanie 7

Rozważmy trzech mieszkańców Wyspy Rycerzy i Łotrów: Alojzego, Bonifacego i Cezarego. Alojzy mówi: Bonifacy i Cezary są rycerzami. Bonifacy natomiast mówi: Alojzy jest łotrem, a Cezary jest rycerzem. Kim są opisywani mieszkańcy?

## Zadanie 8

Jaki związek z poprzednim zadaniem ma zdanie

$$((r_A \leftrightarrow (r_B \wedge r_C)) \wedge (r_B \leftrightarrow (\neg r_A \wedge r_C))) \rightarrow (\neg r_A \wedge \neg r_B \wedge \neg r_C)?$$

Czy to zdanie jest tautologią?

*Wskazówka: Powiedzmy, że rozmawiamy z Zenonem, mieszkańcem wyspy. Oznaczmy zdanie, „Zenon jest rycerzem” jako  $r_Z$ . Zenon mówi zdanie  $p$  (np. „na wyspie jest złoto”). Wtedy tę sytuację możemy opisać jako  $r_Z \leftrightarrow p$ , bo zdanie  $p$  jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy Zenon jest rycerzem.*

## 4 Wyspa Niecałej logiki

Obok Wyspy Rycerzy i Łotrów leży Wyspa Niecałej Logiki. Mieszkańcy tej wyspy może nie zachowują się tak dziwnie, jak ich sąsiedzi, ale za to niektórzy z nich totalnie nie rozumieją niektórych słów z logiki zdaniowej. Spróbujmy się z nimi dogadać!

## Zadanie 9

Powiedzcie Doroteuszowi, który nie rozumie znaczenia słowa „i”, ale za to rozumie znaczenie słów „nie” oraz „lub”, że na wyspie jest srebro i na wyspie jest złoto. Uzasadnijcie, dlaczego znaleźliście dobry sposób.

## Zadanie 10

Powiedzcie Eliaszowi, który nie rozumie żadnych spójników logicznych, poza „jeśli to”, że na wyspie jest srebro lub na wyspie jest złoto. Uzasadnijcie, dlaczego znaleźliście dobry sposób.

## 5 Rozważania o myślakach

Przypomnę, że istotę nazywamy myślakiem podstawowym, jeśli wierzy ona we wszystkie tautologie, oraz jeśli wierzy w zdania  $p$  i  $p \rightarrow q$  to wierzy w zdanie  $q$  (dla dowolnych zdań  $p$  i  $q$ ).

Przez aksjomaty Wyspy Rycerzy i Łotrów rozumiemy następujące fakty: każdy rycerz mówi tylko zdania prawdziwe, każdy łotr mówi tylko zdania fałszywe, każdy tubylec jest albo rycerzem, albo łotrem.

Czasownik „dowiedzieć się” o zdaniu  $p$ , znaczy uwierzyć w  $p$  oraz  $p$  jest prawdziwe.

## Zadanie 11

Załóżmy, że myślak podstawowy odwiedza Wyspę Rycerzy i Łotrów i wierzy w aksjomaty wyspy. Udowodnijcie, że nie jest możliwe, aby dowolny tubylec powiedział do niego „nigdy nie

dowiesz się, że jestem rycerzem”.

*Wskazówka: Uwaga, co prawda nie możecie założyć, że jeśli myślak w coś wierzy, to wierzy, że w to wierzy. Nigdzie nie jest bowiem powiedziane, że myślak ma taką samoświadomość. Można natomiast przemyśleć, jak będzie rozumował myślak i do jakich wniosków go to doprowadzi – i to wystarczy do przeprowadzenia dowodu.*

## 6 Języki różnych wysp

Poza Wyspami Łotrów i Rycerzy oraz Niecałej Logiki jest na świecie jeszcze wiele innych wysp. Ich mieszkańcy używają różnych dziwnych języków.

### Zadanie 12

Poniżej zapisano kilka zależności o dodatnich liczbach całkowitych w języku ndom, który jest językiem z nowogwinejskiej rodziny językowej używanym przez ok. 1000 mieszkańców indonezyjskiej wyspy Yos Sudarso. W zdaniach nie występują liczby większe niż 20, niektóre słowa oznaczają operacje  $+$  i  $\cdot$ .

- mer abo meregh + thef > mer an thef
- mer abo thef + mer abo thonith = tondor
- mer an thef abo ithin + meregh = tondor abo thef
- thonith  $\cdot$  thonith = mer an thef abo thonith
- mer + mer abo sas = mer an thef abo sas

1. Na tej podstawie podajcie co oznaczają następujące liczebniki:

- (a) thonith
- (b) meregh
- (c) mer an thef abo sas
- (d) tondor abo thef
- (e) mer abo ithin

2. Zapiszcie w języku ndom liczby 19 oraz 22.

Zadanie zostało zaczerpnięte z puli zadań Olimipady Ligwistyki Matematycznej.

*Wskazówka: Zaczynaj od analizy ostatniej zależności. Co znaczą an, thef i abo?*

*Wskazówka: Następnie zanalizuj przedostatnią zależność. Można z niej wymyślić znaczenia słów thonith i mer.*

*Wskazówka: Teraz z drugiej zależności z łatwością odczytasz znaczenie liczebnika tondor!*

*Wskazówka: Pora zajrzeć do trzeciej zależności. Ile wynosi suma ithin i meregh? Jakimi liczebnikami mogą więc być? Zauważ, że meregh ma podobny człon do mer.*

*Wskazówka: Pozostaje do rozszefrowania sas. Jakiej cyfry Ci brakuje?*

## 7 Zadania zapasowe

### Zadanie 13

Oferujemy Wam dwie nagrody: krówkę i papierek od krówki. Jeśli wypowiedziecie zdanie prawdziwe otrzymacie papierka. Jeśli wypowiedziecie zdanie fałszywe nie otrzymacie papierka. Czy możecie wypowiedzieć takie zdanie, żeby otrzymać krówkę? Jakie to zdanie?

### Zadanie 14

Z jakiego zdania wypowiedzianego przez tubylca na Wyspie Rycerzy i Łotrów moglibyście wydedukować, że jeśli na wyspie jest złoto to musi być on rycerzem, zaś jeśli na wyspie nie ma złota, to musi on być łotrem?

### Zadanie 15

Czy zdanie  $(p \leftrightarrow (p \wedge q)) \leftrightarrow (q \leftrightarrow (p \vee q))$  jest tautologią?

### Zadanie 16

Felicjan, mieszkaniec Wyspy Niecałej Logiki, w ogóle nie rozumie znaczenia standardowych spójników logicznych  $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ . Dowiedzieliście się jednak, że na co dzień używa innego spójnika logicznego (oznaczymy go  $|$ ), który gdy łączy dwa zdania oznacza, że co najmniej jedno z nich jest fałszywe. Jak wytłumaczyć Felicjanowi  $\neg, \wedge$  oraz  $\vee$ ?

### Zadanie 17

Założmy, że myślak podstawowy odwiedza Wyspę Rycerzy i Łotrów i wierzy w aksjomaty wyspy. Udowodnijcie, że nie jest możliwe, aby dowolny tubylec powiedział do niego „dowiesz się, że jestem łotrem”.

### Zadanie 18

Bislama to powstały na bazie angielszczyzny kreolski język używany na Vanuatu, gdzie jest obok angielskiego i francuskiego językiem urzędowym. Poniżej znajduje się zapisana w bislamie zagadka logiczna dotycząca Samuela, Rika, Pita i Zazi – mieszkańców czterech stojących w linii prostej domów ponumerowanych kolejno liczbami od 1 do 4. Każdy dom ma inny kolor: niebieski, zielony, czarny lub czerwony. Ich mieszkańcy wykonują cztery różne zawody: policjanta, ministra, żołnierza i lekarza. Każde z nich ma jedno zwierzę: kota, psa, szczura lub węża, i pije tylko jeden rodzaj napoju: herbatę, kawę, sok lub wodę.

- (a) Zazi hem i stap slip long nambatu haos.
- (b) Nambatri haos we i blufala mo nambafo haos we i redfala.
- (c) Rik hem i stap klosap long redfala haos.
- (d) Man blong rat i stap klosap long haos blong man blong snek.
- (e) Samuel hem i stap slip long grinfala haos mo hem i gat wan puskat.

- (f) Wan man i stap dring wota mo hem i stap klosap long nambatri haos.
- (g) Polisman hem i stap klosap long haos blong man blong snek.
- (h) Wan man hem i stap slip long grinfała haos mo hem i stap dring ti.
- (i) Pit blong snek i stap dring wota.
- (j) Wan man hem i stap dring kafe mo hem i stap klosap long docta.
- (k) Zazi hem i soldia.
- (l) Rik hem i stap dring jus.

1. Odpowiedzcie na pytanie z zagadki: Wanem nem blong man we i ministra? (Jak ma na imię osoba, która jest ministrem?)
2. Przetłumaczcie na polski zdania (d) i (f).
3. W którym domu mieszka wąż? W którym domu pije się kawę? W którym domu mieszka kot?

Rozwiążcie to zadanie nie korzystając z Internetu! Zadanie zostało zaczerpnięte z puli zadań Olimpiady Lingwistyki Matematycznej.

## 8 Zadania domowe

### Zadanie 19 (2 punkty)

Gerwazy, mieszkaniec Wyspy Niecałej Logiki, w ogóle nie rozumie znaczenia standardowych spójników logicznych  $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ . Dowiedział się jednak, że na co dzień używa innego spójnika logicznego (oznaczymy go  $\downarrow$ ), który gdy łączy dwa zdania oznacza, że żadne z nich nie jest prawdziwe. Inaczej mówiąc jest on opisany poniższą tabelką:

$\downarrow$	tak	nie
tak	nie	nie
nie	nie	tak

Jak wytłumaczyć Gerwazemu  $\neg, \vee$  oraz  $\rightarrow$ ?

### Zadanie 20 (2 punkty)

Rozważmy trzech mieszkańców Wyspy Rycerzy i Łotrów: Alojzego, Bonifacego i Cezarego. Alojzy mówi: Bonifacy jest łotrem. Bonifacy natomiast mówi: Alojzy i Cezary nie są tego samego rodzaju. Kim jest Cezary? Zapisz wypowiedzi uczestników zdarzenia używając zdań  $r_A, r_B$  i  $r_C$  mówiących, że odpowiednio Alojzy, Bofinacy i Cezary jest rycerzem (patrz zadanie 8). Wypisz tautologię ilustrującą twoje wnioski.

## Zadanie 21 (2 punkty)

Wymyśl prostą grę, w ramach której gracz przeżywa pewną przygodę czytając kolejne opisy i podejmując kolejne wybory prowadzące go do różnych następnych fragmentów gry. Przykładowy fragment gry może wyglądać następująco: „Napotykasz na rozwidlenie dróg. Lewa prowadzi w kierunku zamku, a prawa w kierunku widocznych na horyzoncie gór. Którą wybierasz? a) lewą – przejdź do fragmentu nr 5, b) prawą – przejdź do fragmentu nr 7.” W grze powinny też pojawić się fragmenty kończące ją w sposób pozytywny, np. „znalazłeś skarb” oraz negatywny np. „spadłeś w przepaść”. Każdy wybór niech ma dwie opcje oznaczone literami *a* i *b*. Następnie przeanalizuj swoją grę i podaj przykład dwóch słów (ciągów liter *a* i *b*), które są „akceptowane”, tzn. jeśli kolejne wybory podejmie się zgodnie z nimi to prowadzą do pozytywnego wyniku. Podaj też przykłady dwóch słów, które są „odrzucone”, czyli prowadzą do negatywnego końca lub w ogóle nie prowadzą do żadnego końcowego fragmentu (kończą się, gdy potrzebny jest kolejny wybór).