

O różnych geometriach

i

możliwych kształtach

Wszechświata

Na początku były dwie geometrie

Ziemska – płaska, taka, jakiej się uczymy w szkole, później nazwana euklidesową (stąd nazwa **geometria**)

i

Niebiańska – sferyczna, opisująca sferę niebieską, do której są przymocowane gwiazdy i po której wędrują planety (**astronomia**).

Na początku były dwie geometrie

Ziemska – płaska, taka, jakiej się uczymy w szkole, później nazwana euklidesową (stąd nazwa **geometria**)

i

Niebiańska – sferyczna, opisująca sferę niebieską, do której są przymocowane gwiazdy i po której wędrują planety (**astronomia**).

Potem, w –IV wieku, odkryto, że geometria nieba jest identyczna z geometrią powierzchni kuli i można ją badać metodami ziemskiej geometrii.

Już Starożytni odkryli, że pole trójkąta zależy (na danej sferze)
jedynie od sumy jego kątów.

Już Starożytni odkryli, że pole trójkąta zależy (na danej sferze) jedynie od sumy jego kątów.

Pole dwukąta na sferze jednostkowej to 4α , więc mamy

$$4\alpha = 2A + 2T,$$

$$4\beta = 2B + 2T,$$

$$4\gamma = 2C + 2T,$$

stąd

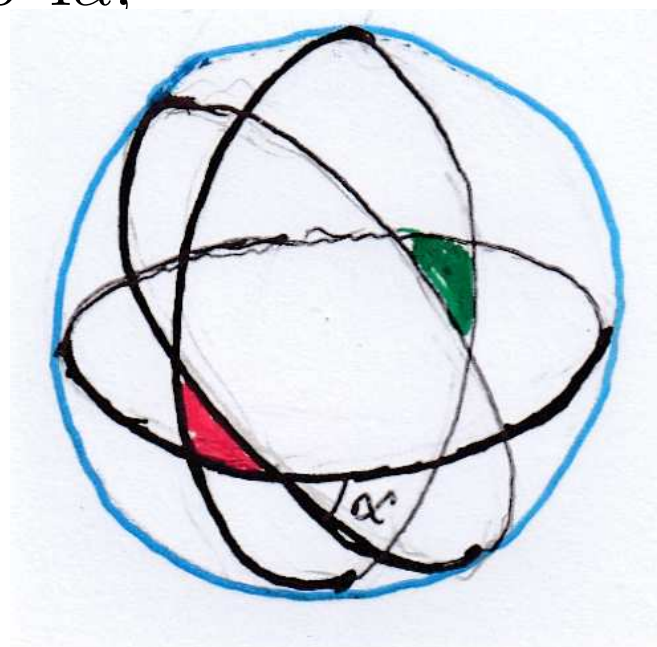
$$\begin{aligned} 4(\alpha + \beta + \gamma) &= 2(A + B + C) + 6T = \\ &= 2(A + B + C + T) + 4T = 4\pi + 4T, \end{aligned}$$

a więc $T = (\alpha + \beta + \gamma) - \pi$.

Zatem pole trójkąta sferycznego na sferze o promieniu R to

$$R \cdot ((\alpha + \beta + \gamma) - \pi).$$

Liczbę $\Delta(T) := \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$ nazywa się defektem trójkąta.



Ambitni mogą spróbować udowodnić
sferyczne twierdzenie sinusów

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma},$$

gdzie a, b, c to boki, a α, β, γ to leżące naprzeciw kąty trójkąta sferycznego;

Ambitni mogą spróbować udowodnić
sferyczne twierdzenie sinusów

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma},$$

gdzie a, b, c to boki, a α, β, γ to leżące naprzeciw kąty trójkąta sferycznego;

jeszcze BARDZIEJ Ambitni mogą udowodnić
sferyczne twierdzenie cosinusów

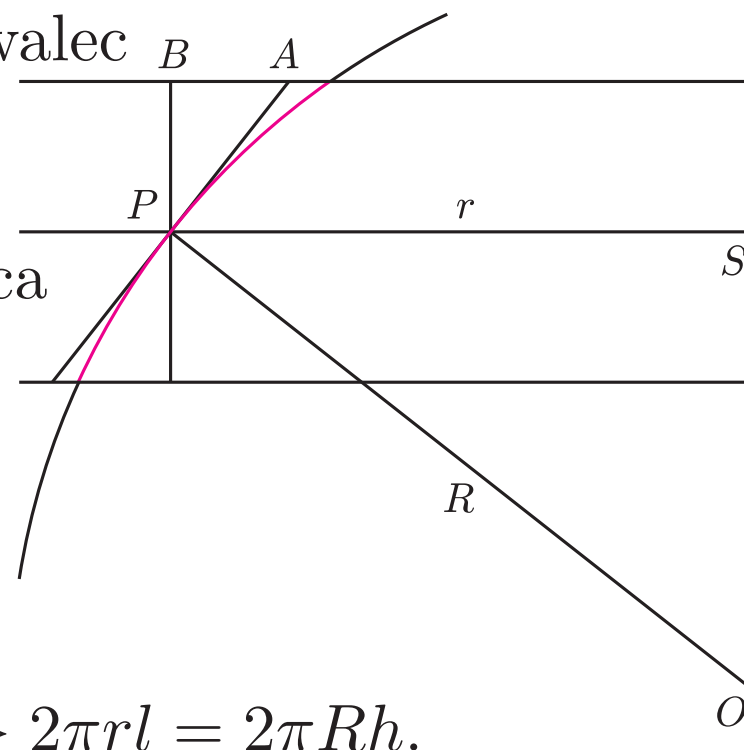
$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha.$$

Oba te twierdzenia odkryli Arabowie w X wieku.

Archimedes (*O kuli i walcu*) obliczył pole koła na sferze jako wniosek z twierdzenia:

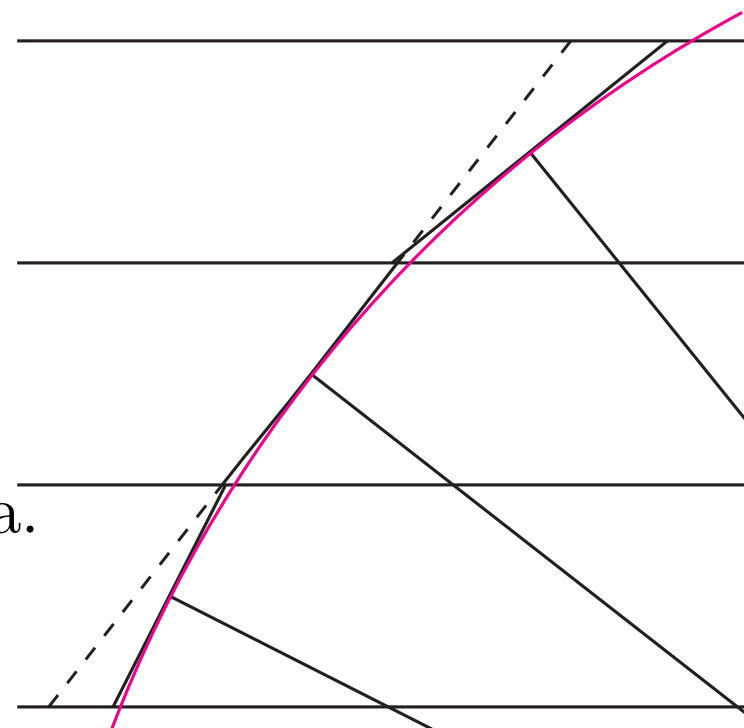
Pole sfery jest równe polu powierzchni bocznej opisanego na niej walca.

Spostrzeżenie. Sferę i opisany na niej walec przecinamy dwiema płaszczyznami prostopadłymi do jego osi. Pole wyciętej powierzchni bocznej walca jest równe polu stożka ściętego opisanego na tej warstwie sfery w połowie jej wysokości.



$$\frac{PS}{PB} = \frac{PO}{PA} \Rightarrow \frac{r}{\frac{1}{2}h} = \frac{R}{\frac{1}{2}l} \Rightarrow 2\pi rl = 2\pi Rh.$$

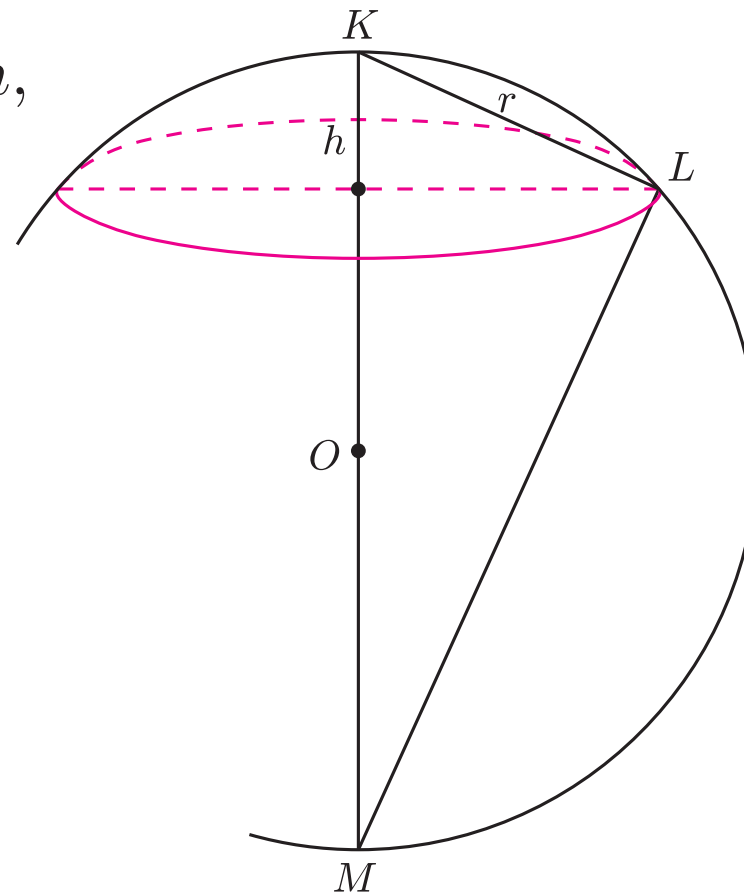
Aby obliczyć pole sfery sferę (i walec) możemy pociąć na coraz drobniejsze warstwy, a suma powierzchni bocznych powstałych dla każdej warstwy stożków ściętych będzie równa sumarycznej powierzchni bocznej walca.



Wniosek I. Korzystając z tego, że ciąg stały jest zbieżny, mamy **pole sfery** $= 2\pi R \cdot 2R = 4\pi r^2$. czyli $\gamma = 4\pi$.

Wniosek II. Pole koła na sferze jest równe πr^2 , gdzie r jest odległością (przestrzenną!) środka okręgu od jego brzegu.

Istotnie, pole czaszy jest równe $2\pi R \cdot h$,
czyli $\pi \cdot (2R \cdot h) = \pi r^2$.



Wniosek II. Pole koła na sferze jest równe πr^2 , gdzie r jest odległością (przestrzenną!) środka okręgu od jego brzegu.

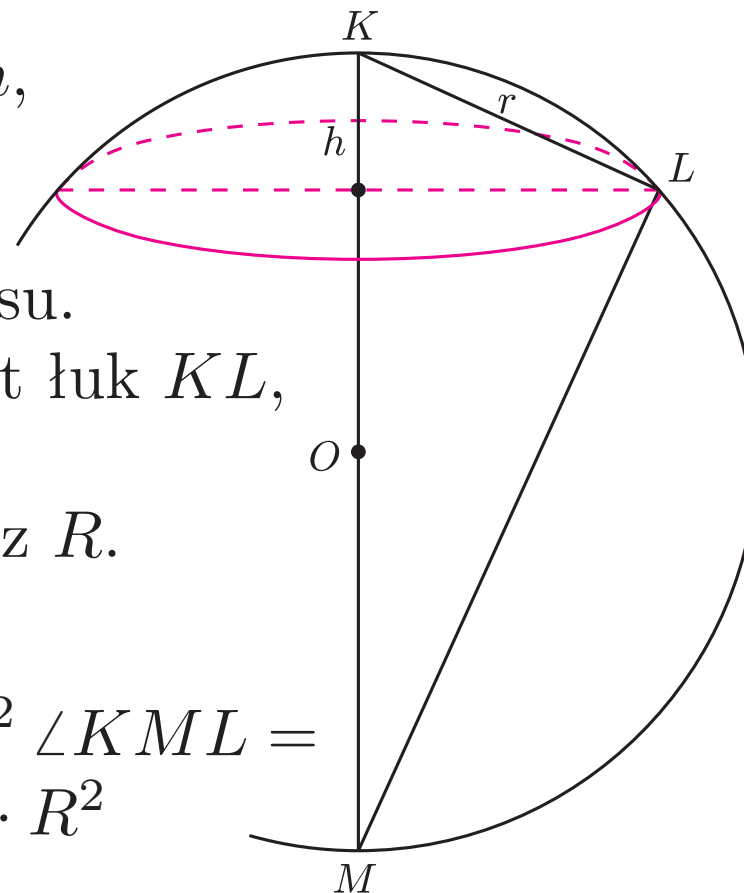
Istotnie, pole czaszy jest równe $2\pi R \cdot h$,
czyli $\pi \cdot (2R \cdot h) = \pi r^2$.

Dla mieszkańców sfery to r nie ma sensu.

Dla nich promieniem koła na sferze jest łuk KL ,
oznaczymy go r_s ,
czyli jest to kąt KOL pomnożony przez R .

Ponieważ $\angle KOL = 2\angle KML$

$$\begin{aligned} \text{i } r &= 2R \sin \angle KML, \text{ więc } r^2 = 4R^2 \sin^2 \angle KML = \\ &= 2R^2(1 - \cos \angle KOL) = 2\left(1 - \cos \frac{r_s}{R}\right) \cdot R^2 \end{aligned}$$

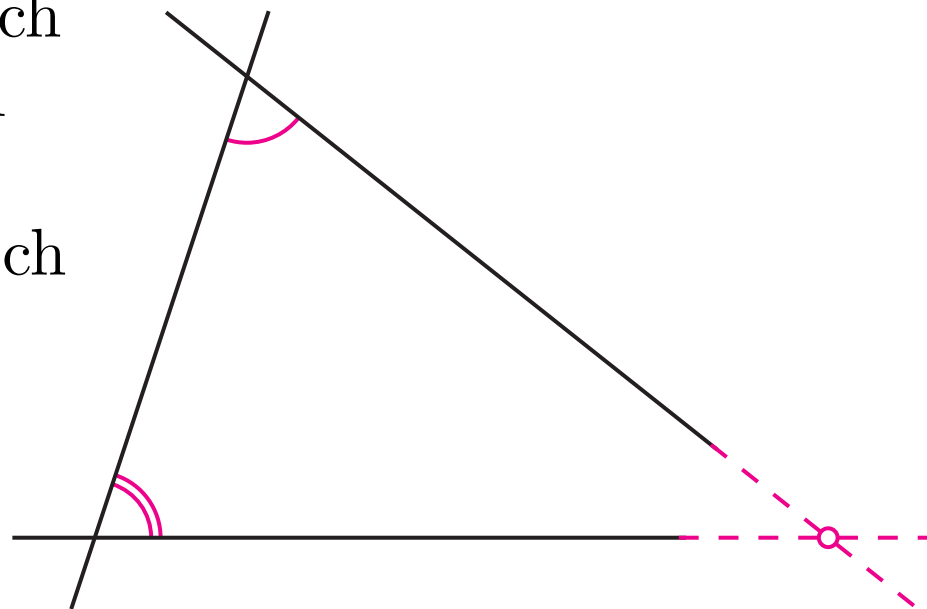


Tak więc pole koła na sferze to $2\pi\left(1 - \cos \frac{r_s}{R}\right) \cdot R^2$.

Zauważmy, że jest zawsze mniejsze od pola koła na płaszczyźnie.

Geometrię uprawiano w oparciu o postulaty sformułowane w *Elementach* Euklidesa:

1. Od dowolnego punktu do dowolnego innego można poprowadzić prostą.
2. Ograniczoną prostą można dowolnie przedłużyć.
3. Z dowolnego środka dowolnym promieniem można opisać okrąg.
4. Wszystkie kąty proste są równe.
5. Jeśli suma kątów wewnętrznych jednostronnych, utworzonych przez dwie proste przecięte trzecią, jest mniejsza od dwóch kątów prostych, to proste te po przedłużeniu przetną się i to z tej właśnie strony.



Problem Proklosa: czy *V* postulat Euklidesa jest potrzebny?

stworzył (ewentualne) zapotrzebowanie
na inną geometrię niż euklidesowa czy sferyczna.

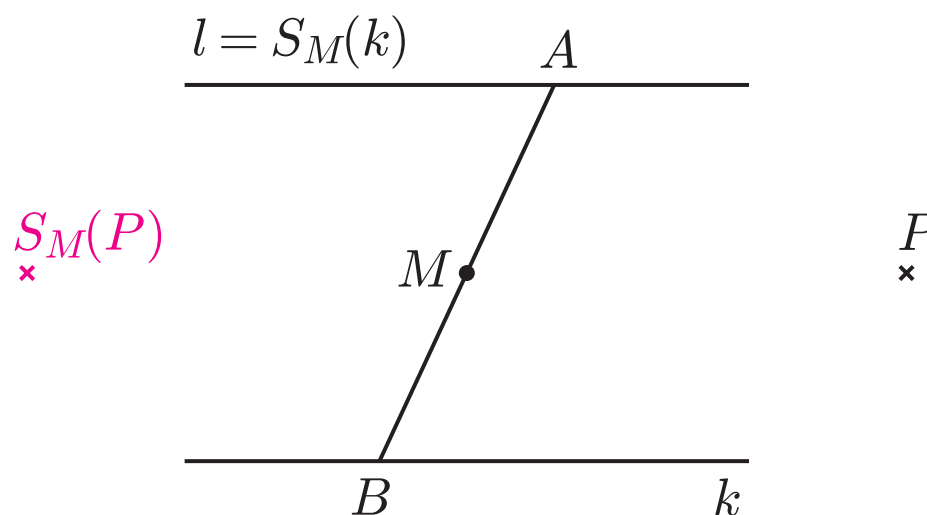
Jej (ewentualne) własności pojawiały się jako przesłanki
“dowodów” *V* postulatu Euklidesa
opartych – z założenia – na czterech pierwszych postulatach.

Problem Proklosa: czy V postulat Euklidesa jest potrzebny?

stworzył (ewentualne) zapotrzebowanie na inną geometrię niż euklidesowa czy sferyczna.

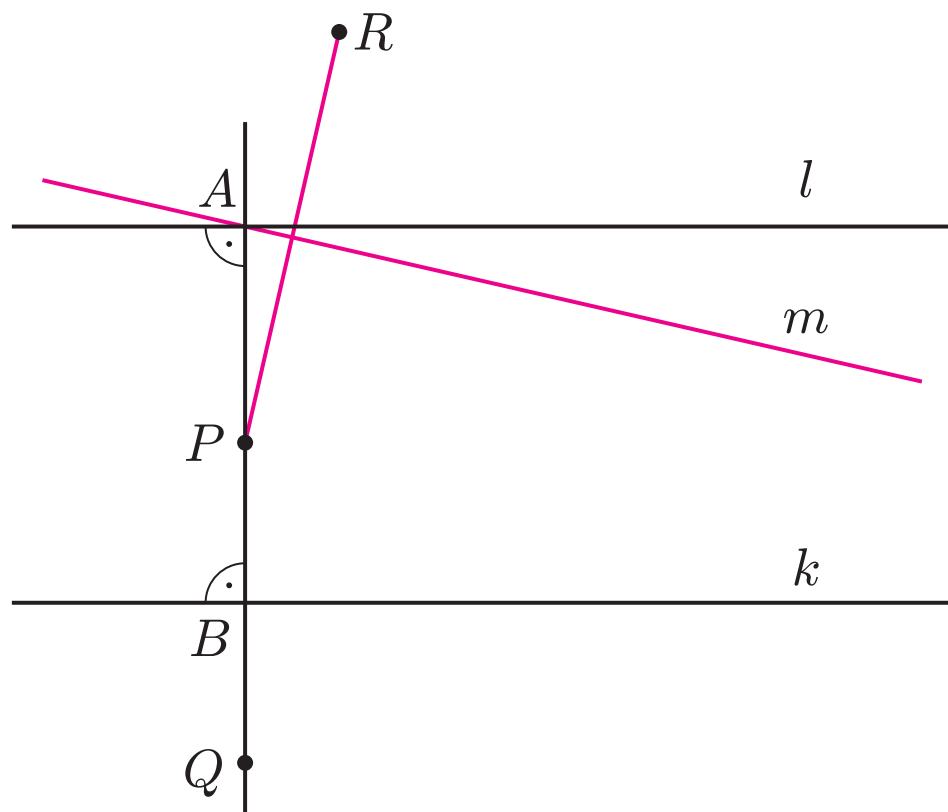
Jej (ewentualne) własności pojawiały się jako przesłanki “dowodów” V postulatu Euklidesa opartych – z założenia – na pierwszych czterech postulatach.

Już z czterech postulatów wynika, że przez punkt poza prostą można na płaszczyźnie poprowadzić do niej prostą rozłączną.



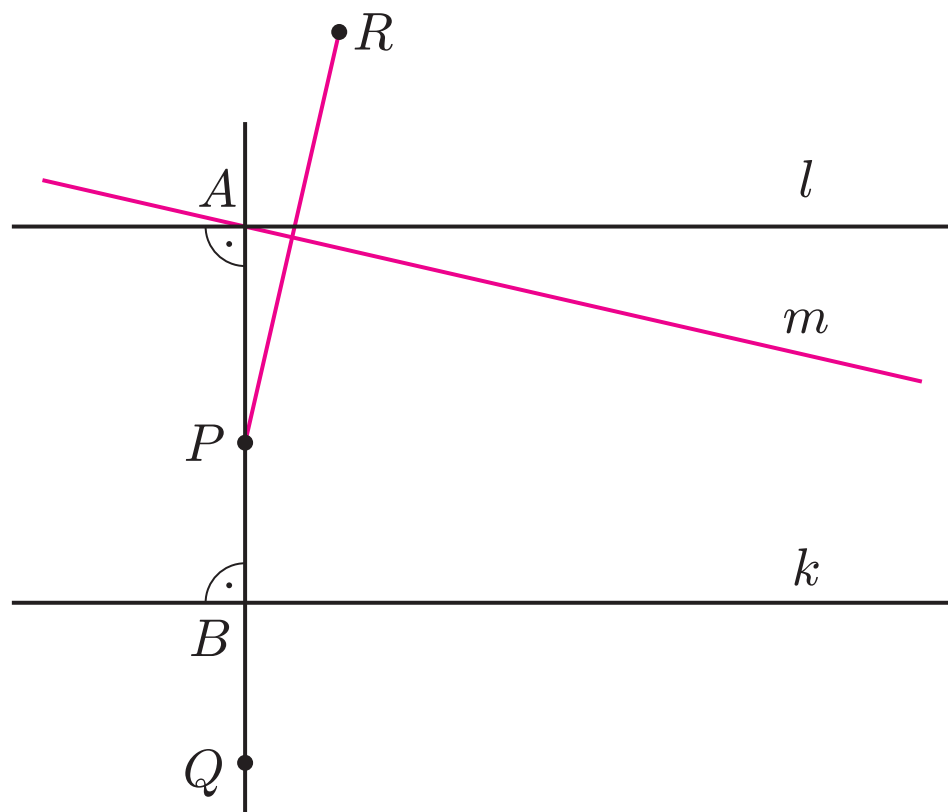
Oto “dowód” V postulatu autorstwa Farkasa Bolyaia:

Na płaszczyźnie przez punkt poza prostą można poprowadzić tylko jedną prostą z nią rozłączną.



Oto “dowód” V postulatu autorstwa Farkasa Bolyaia:

Na płaszczyźnie przez punkt poza prostą można poprowadzić tylko jedną prostą z nią rozłączną.



środek okręgu opisanego
na trójkącie PQR
leży na symetralnych boków
 PQ i PR
czyli na k i m ,
a więc proste te przecinają się.

Girolamo Saccheri udowodnił poprawnie,
nie korzystając z V postulatu,
że suma kątów trójkąta nie może być większa od π ,
a więc wykluczył geometrię sferyczną
z grona geometrii opartych na pierwszych czterech postulatach.

Co więcej, próbował stworzyć inną geometrię od euklidesowej,
spełniającą początkowe cztery postulaty.

Za jego przykładem poszło wielu matematyków.

Immanuel Kant (1724 – 1804), *Krytyka czystego rozumu*

Immanuel Kant (1724 – 1804), *Krytyka czystego rozumu*

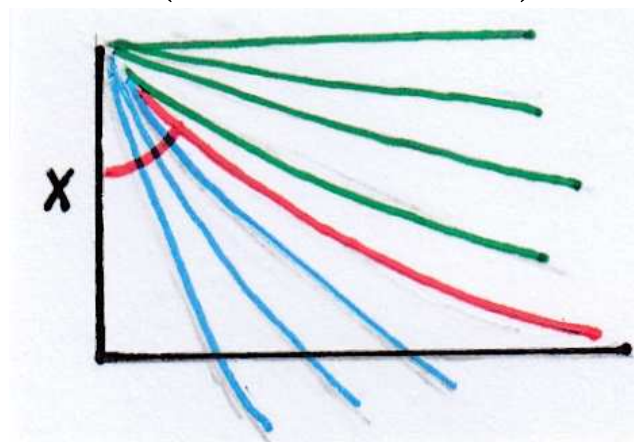
Николай Иванович Лобачевский (1793 – 1856)

János Bolyai (1802 – 1860)

Immanuel Kant (1724 – 1804), *Krytyka czystego rozumu*

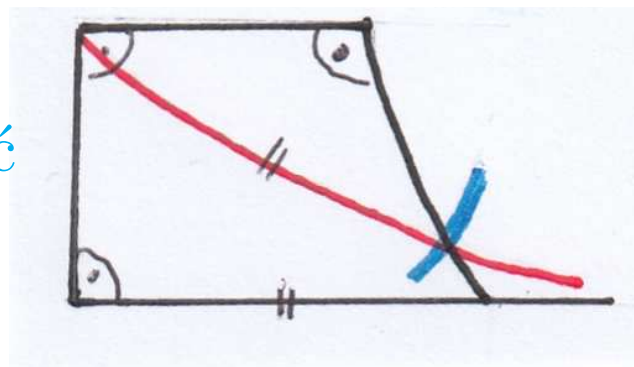
Николай Иванович Лобачевский (1793 – 1856)

Kąt równoległości
jest równy $2 \operatorname{arc} \operatorname{ctg} e^{x/r}$.



János Bolyai (1802 – 1860)

Równoległą można skonstruować
cyrklem i linijką.



Carl Gauss uogólnił geometrię sferyczną, tworząc **geometrię wewnętrzną** powierzchni, czyli teorię tego, co się nie zmienia, gdy powierzchnię poddajemy deformacjom niezmieniającym długości żadnej leżącej na niej krzywej.

Okazało się, że nie zmieniają się wtedy także kąty między krzywymi i pola obszarów na tej powierzchni leżących.

I w ten sposób liczba różnych dwuwymiarowych geometrii stała się właściwie nieskończona.

Carl Gauss uogólnił geometrię sferyczną, tworząc **geometrię wewnętrzną** powierzchni, czyli teorię tego, co się nie zmienia, gdy powierzchnię poddajemy deformacjom niezmieniającym długości żadnej leżącej na niej krzywej.

Okazało się, że nie zmieniają się wtedy także kąty między krzywymi i pola obszarów na tej powierzchni leżących.

I w ten sposób liczba różnych dwuwymiarowych geometrii stała się właściwie nieskończona.

Gauss udowodnił też **theorema egregium**, wskazujące jeszcze jedną własność powierzchni należąca do geometrii wewnętrznej – **krzywiznę**.

Krzywizna krzywej (w punkcie) to odwrotność promienia najlepiej udającego ją okręgu.

Krzywizna normalna powierzchni (w punkcie, w danym kierunku stycznym) to krzywizna przecięcia powierzchni płaszczyzną prostopadłą do jej płaszczyzny stycznej.

(Euler) Jeśli krzywizny normalne (w punkcie) nie są stałe, to przyjmują dwa ekstrema w kierunkach prostopadłych.

(Gauss) Theorema egregium:
iloczyn ekstremalnych krzywizn normalnych należy do geometrii wewnętrznej.

Dziś nazywamy ten iloczyn **krzywizną Gaussa**.

(Gauss) $|ABC| \cdot K = -\Delta(ABC)$

(Lambert) Gdy krzywizna powierzchni jest równa $-1/R^2$,
pole koła o promieniu r na tej powierzchni
dane jest przez $2\pi(\cosh \frac{r}{R} - 1)R^2$.

(Gauss) $|ABC| \cdot K = -\Delta(ABC)$

(Lambert) Gdy krzywizna powierzchni jest równa $-1/R^2$, pole koła o promieniu r na tej powierzchni dane jest przez $2\pi(\cosh \frac{r}{R} - 1)R^2$.

Porównując koła o tych samych promieniach $r > 0$ na powierzchniach o krzywiznie 1, 0 i -1 mamy

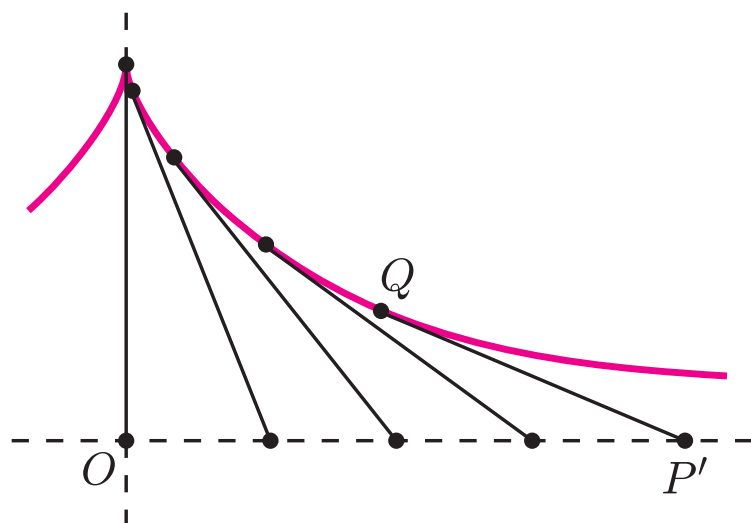
$$2\pi(1 - \cos r) < \pi r^2 < 2\pi(\cosh r - 1),$$

bo $\cos r = 1 - \frac{r^2}{2!} + \frac{r^4}{4!} - \frac{r^6}{6!} + \dots$

a $\cosh r = 1 + \frac{r^2}{2!} + \frac{r^4}{4!} + \frac{r^6}{6!} + \dots$

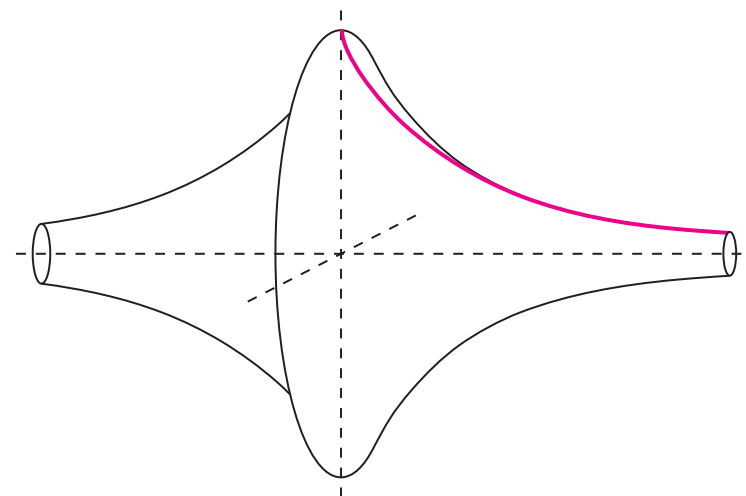
Tak więc, gdy krzywizna jest dodatnia, powierzchni jest mniej niż na zwykłej płaszczyźnie, a gdy jest ujemna – więcej.

Odpowiednikiem–przeciwstawieniem sfery,
powierzchnią o stałej krzywiznie ujemnej jest **pseudosfera**
powstająca przez obrót traktysy.



Jej krzywizna to $|QP'|^2$.

Ma ona jednak punkty osobliwe.



Bernhard Riemann w wykładzie habilitacyjnym uogólnił teorię powierzchni Gaussa na dowolny skończony wymiar.

Rozmaitość: obiekt skleiony z “łatek”

odpowiedniowymiarowej przestrzeni euklidesowej

plus dość dowolny **iloczyn skalarny**,

czyli zestaw współczynników w sumie $A \bullet B := \sum_{i,j} w_{i,j} a_i b_j$,

gdzie a_i i b_j to współrzędne punktów A i B rozmaitości;

żąda się by $A \bullet B = B \bullet A$, dla dowolnych A i B ,

oraz by $A \bullet A \geq 0$.

Bernhard Riemann w wykładzie habilitacyjnym uogólnił teorię powierzchni Gaussa na dowolny skończony wymiar.

Rozmaitość: obiekt skleiony z “łatek”

odpowiedniowymiarowej przestrzeni euklidesowej

plus dość dowolny **iloczyn skalarny**,

czyli zestaw współczynników w sumie $A \bullet B := \sum_{i,j} w_{i,j} a_i b_j$,

gdzie a_i i b_j to współrzędne punktów A i B rozmaitości;

żąda się by $A \bullet B = B \bullet A$, dla dowolnych A i B ,

oraz by $A \bullet A \geq 0$.

Przykład: w n -wymiarowej przestrzeni euklidesowej

$w_{i,j}$ jest dla $i = j$ równe 1 i dla $i \neq j$ równe 0.

Iloczyn skalarny definiuje geometrię na rozmaitości:

długość wektora \vec{v} to $|\vec{v}| := \sqrt{\vec{v} \bullet \vec{v}}$,

a cosinus kąta między wektorami \vec{v} i \vec{w} to $\frac{\vec{v} \bullet \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|}$.

Ale krzywiznę Gaussa trzeba już zdefiniować inaczej.

(Weingarten) Krzywizna Gaussa to stosunek pola odwzorowania sferycznego do pola danej powierzchni.

Odwzorowanie sfery to sfera jednostkowa, walca to okrąg, płaszczyzny to punkt, torusa to zbiór pusty itd.

W tak zdefiniowanej geometrii riemanowskiej zachowana jest zależność między krzywizną a ilością przestrzeni.

Daje to w Ogólnej Teorii Względności

utożsamienie masy i krzywizny:

krzywizna zmniejsza ilość przestrzeni,
czyli ściąga wszystko do siebie,
tak jak masa czyni to za pomocą grawitacji.

W ten sposób bardzo duża krzywizna definiuje również czarne dziury: krzywizna ściągnęła więcej przestrzeni niż jej było.

John Archibald Wheeler, *General Relativity*

Gdy uznamy, iż fizyka OTW

to tylko część praw rządzących światem,

możemy rozważyć jeszcze inny problem:

usytuowanie naszego świata w nadprzestrzeniach
(teoria superstrun, supersymetrie itp.).

Tu jest np.

(Borsuk) n -wymiarową

przestrzeń euklidesową

można izometrycznie wewnętrznie

zanurzyć w dowolnie małą kulkę

$(n + 1)$ -wymiarowej

przestrzeni euklidesowej.

Gdy uznamy, iż fizyka OTW

to tylko część praw rządzących światem,

możemy rozważyć jeszcze inny problem:

usytuowanie naszego świata w nadprzestrzeniach
(teoria superstrun, supersymetrie itp.).

Tu jest np.

(Borsuk) n -wymiarową
przestrzeń euklidesową
można izometrycznie wewnętrznie
zanurzyć w dowolnie małą kulkę
 $(n + 1)$ -wymiarowej
przestrzeni euklidesowej.

Przykład dla $n = 1$:

spirała opisana zależnością

$$r(\varphi) = \frac{A}{2} \cdot \frac{2\varphi + 1}{\varphi + 1}$$

nawija $[0, +\infty)$

na koło o promieniu $\frac{A}{2}$

tak, że mieści się to

w kole o promieniu A .

Gdy uznamy, iż fizyka OTW

to tylko część praw rządzących światem,

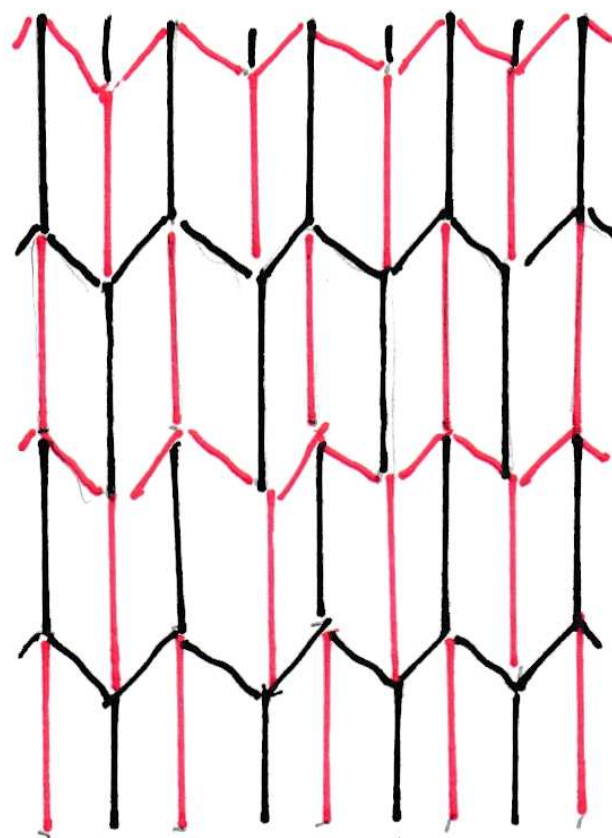
możemy rozważyć jeszcze inny problem:

usytuowanie naszego świata w nadprzestrzeniach
(teoria superstrun, supersymetrie itp.).

Tu jest np.

(Borsuk) n -wymiarową
przestrzeń euklidesową
można izometrycznie wewnętrznie
zanurzyć w dowolnie małą kulkę
 $(n + 1)$ -wymiarowej
przestrzeni euklidesowej.

To przykład dla $n = 2$



Gdy rozmaitością będzie półpłaszczyzna $x > 0$,

a iloczyn skalarny będzie dany przez

$$w_{1,1} = w_{2,2} = 1/x^2 \text{ i } w_{1,2} = w_{2,1} = 0,$$

to otrzymamy geometrię Bolyaia–Łobaczewskiego,
zwaną również hiperboliczną.

Powstaje pytanie, jak w takim modelu wyglądają proste,
czyli, mówiąc językiem geometrii riemanskiej, [geodezyjne](#).

Geodezyjne charakteryzuje każdy z trzech równoważnych warunków: są one

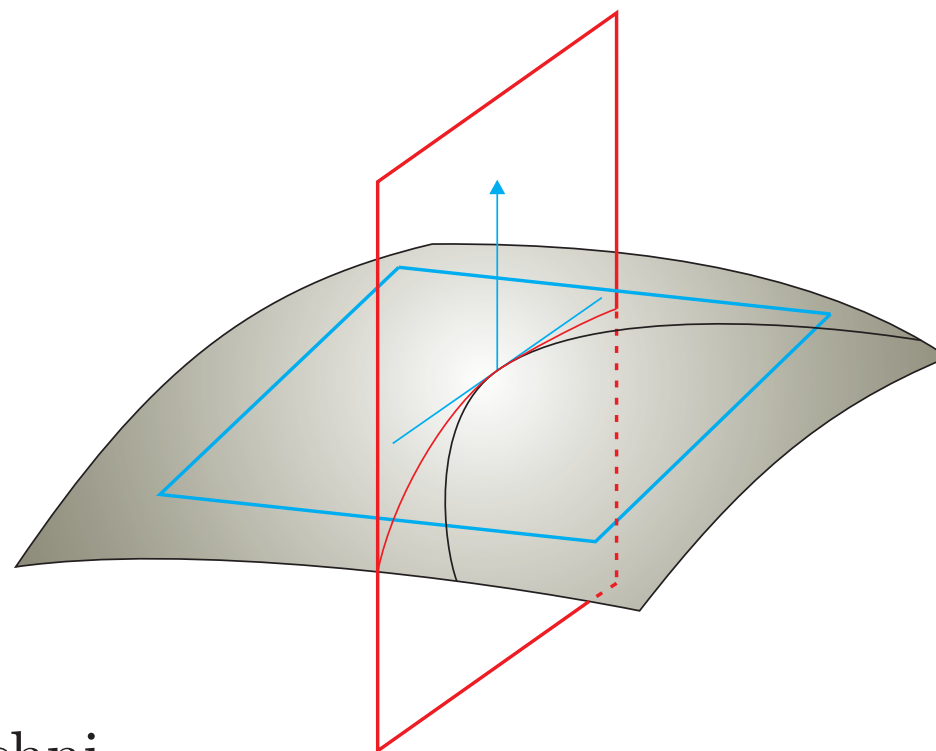
- najmniej krzywe,

(Muesnier) Krzywizna krzywej na powierzchni zależy od krzywizny normalnej w następujący sposób:

$$\kappa = \frac{\kappa_N}{\sin \alpha},$$

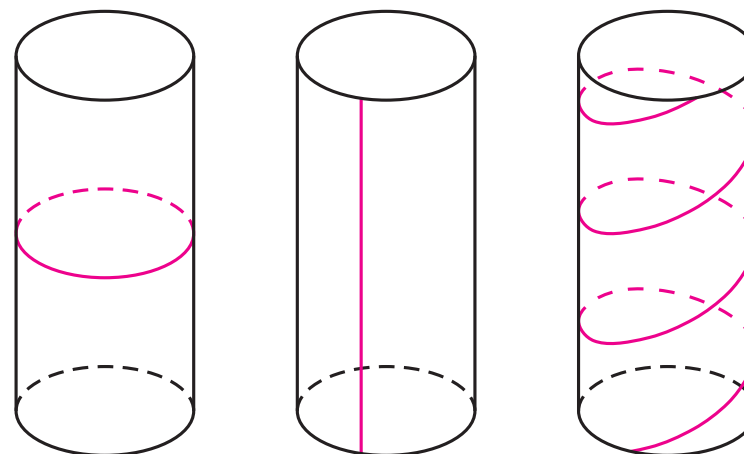
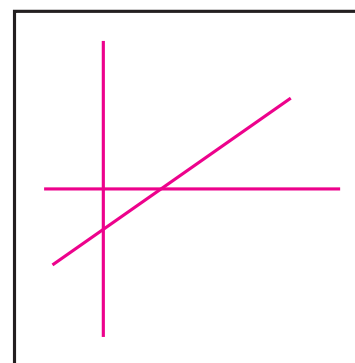
gdzie α jest kątem między płaszczyzną styczną do powierzchni i płaszczyzną ściśle styczną do krzywej.

Czyli geodezyjna ma krzywiznę równą krzywiznie normalnej.



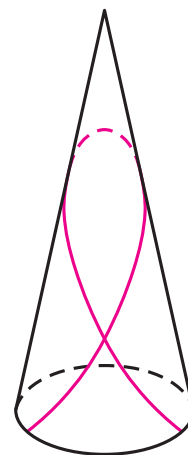
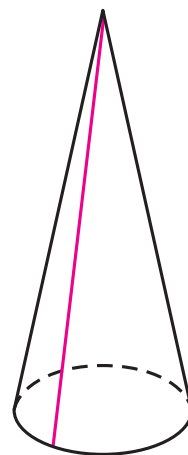
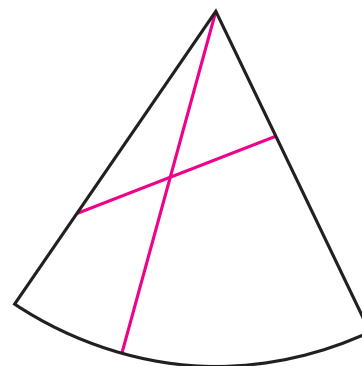
Geodezyjne charakteryzuje każdy z trzech równoważnych warunków: są one

- najmniej krzywe,
- lokalnie najkrótsze;



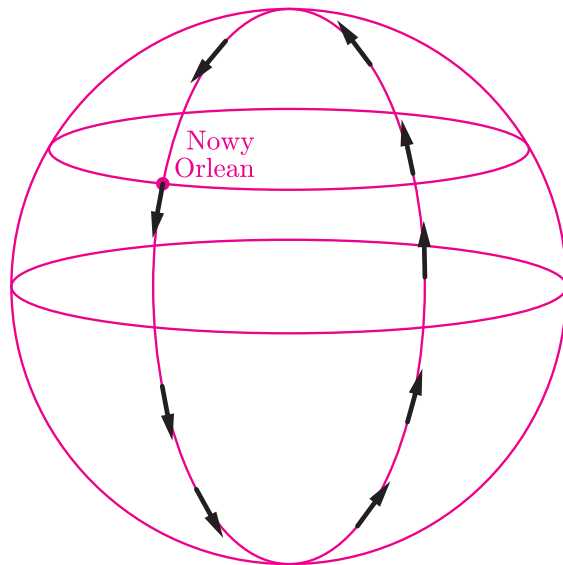
Geodezyjne charakteryzuje każdy z trzech równoważnych warunków: są one

- najmniej krzywe,
- lokalnie najkrótsze;



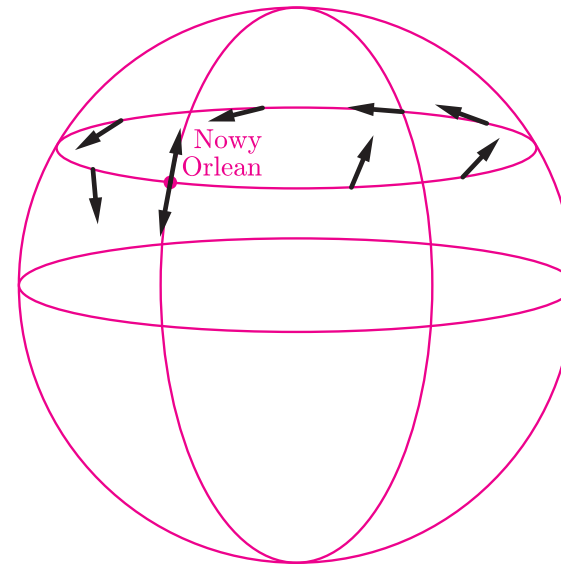
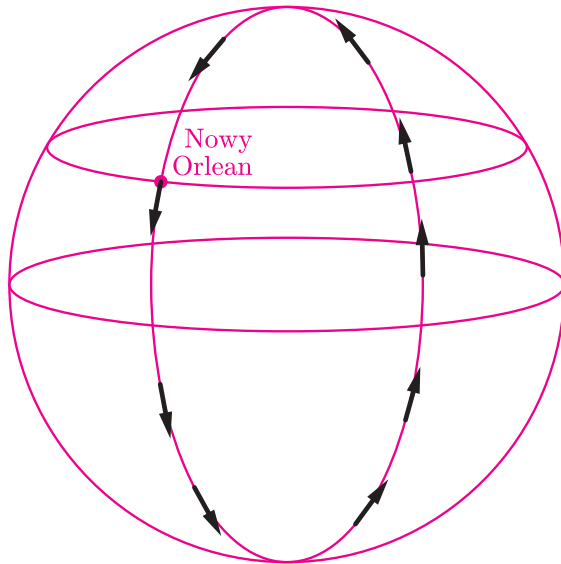
Geodezyjne charakteryzuje każdy z trzech równoważnych warunków: są one

- najmniej krzywe, czyli ich krzywizna jest stale równa krzywiznie normalnej;
- lokalnie najkrótsze;
- frontalne.



Geodezyjne charakteryzuje każdy z trzech równoważnych warunków: są one

- najmniej krzywe, czyli ich krzywizna jest stale równa krzywiznie normalnej;
- lokalnie najkrótsze;
- frontalne.



W przytoczonym modelu geometrii Bolyaia–Łobaczewskiego prostymi są półokręgi i proste prostopadłe do brzegu półpłaszczyzny,

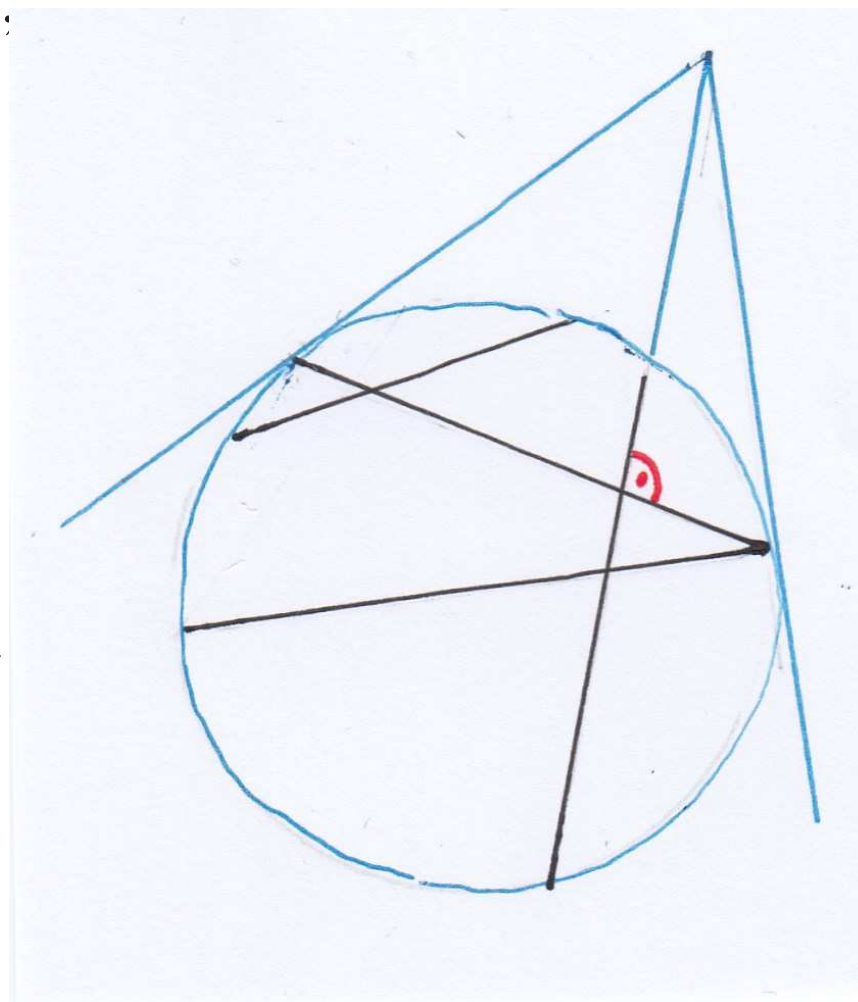
a odległość punktów A i B można obliczyć jako moduł logarytmu z dwustosunku tych punktów i końców prostej na której leżą:

$$\left| \log \frac{|AP| \cdot |BQ|}{|AQ| \cdot |BP|} \right|,$$

gdzie $|XY|$ to euklidesowa odległość punktów modelu.

Dla bardziej (jak ja) lubiących rysować niż rachować bardziej przydatny do zapoznania się z geometrią Bolyaia–Łobaczewskiego jest **model Kleina**, gdzie

- cała **płaszczyzna** to wnętrze koła,
- geodezyjne (**proste**) to cięciwy,
- proste **równoległe** to mające wspólny punkt na brzegu,
- **nadrównoległe** to całkiem rozłączne,
- a dwie proste są **prostopadłe**, gdy przedłużenie jednej przechodzi przez punkt przecięcia stycznych wystawionych w końcach drugiej.

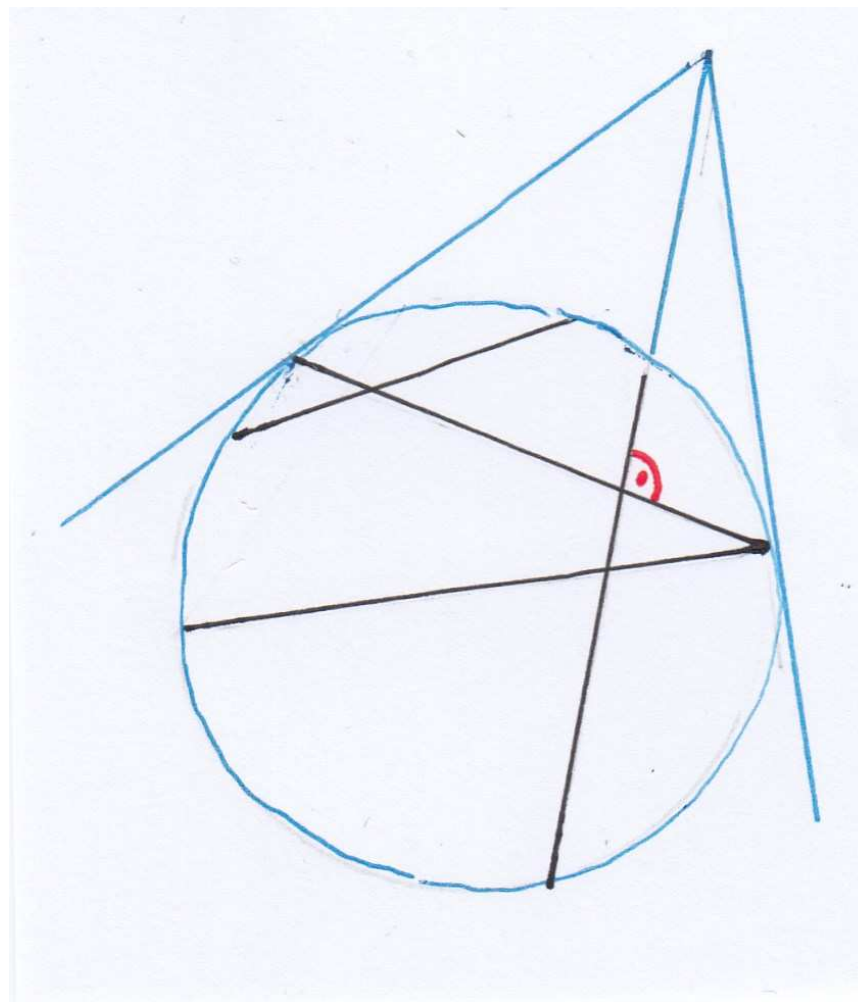


Zadania.

1 (łatwe). Wykaż, że dwie proste są nadržównoległe wtedy i tylko wtedy, gdy mają wspólną prostopadłą.

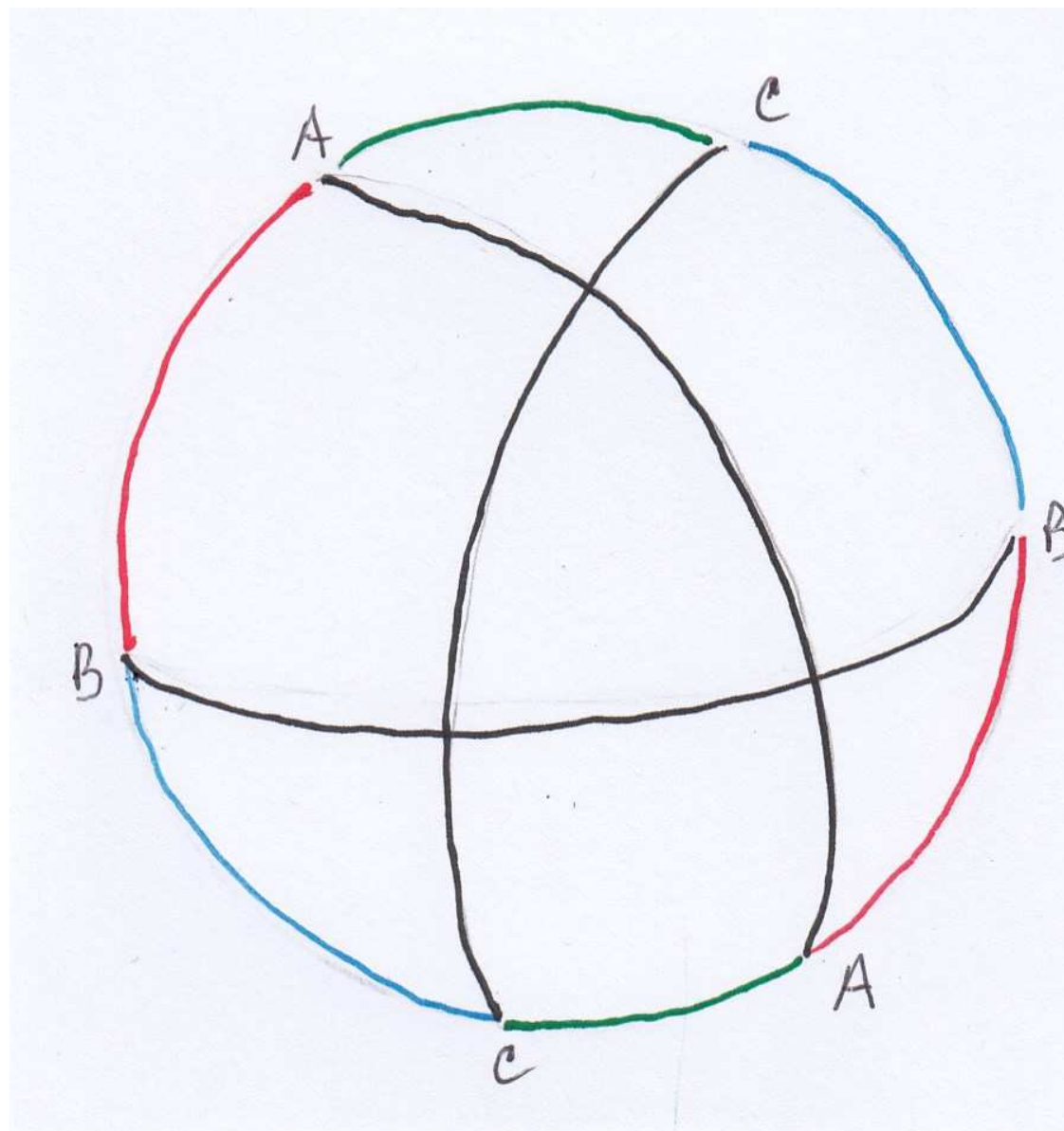
2 (średnie). Narysuj w modelu Kleina trójkąt, którego wysokości nie przecinają się.

3 (trudne). Narysuj w modelu Kleina trójkąt, na którym nie można opisać okręgu.

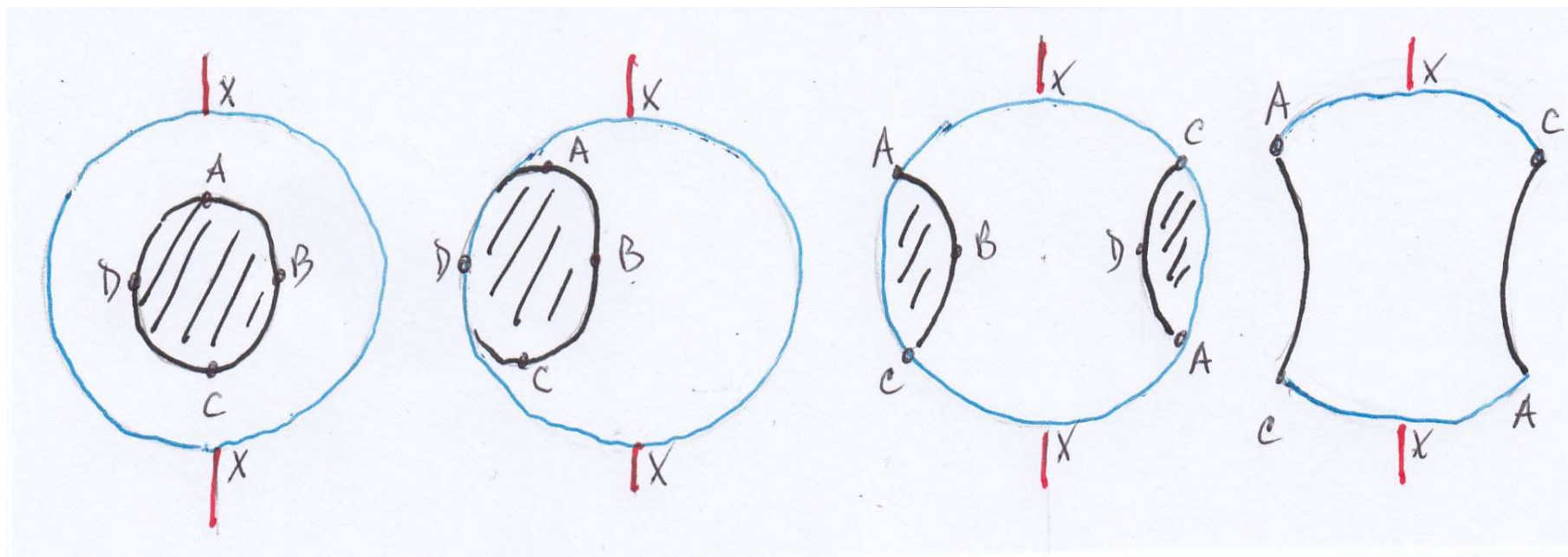


Geometria eliptyczna powstaje z geometrii sferycznej przez utożsamienie antypodów.

Jak widać,
np. trzy proste
nieprzechodzące
przez jeden punkt dzielą
płaszczyznę eliptyczną
na cztery trójkąty.



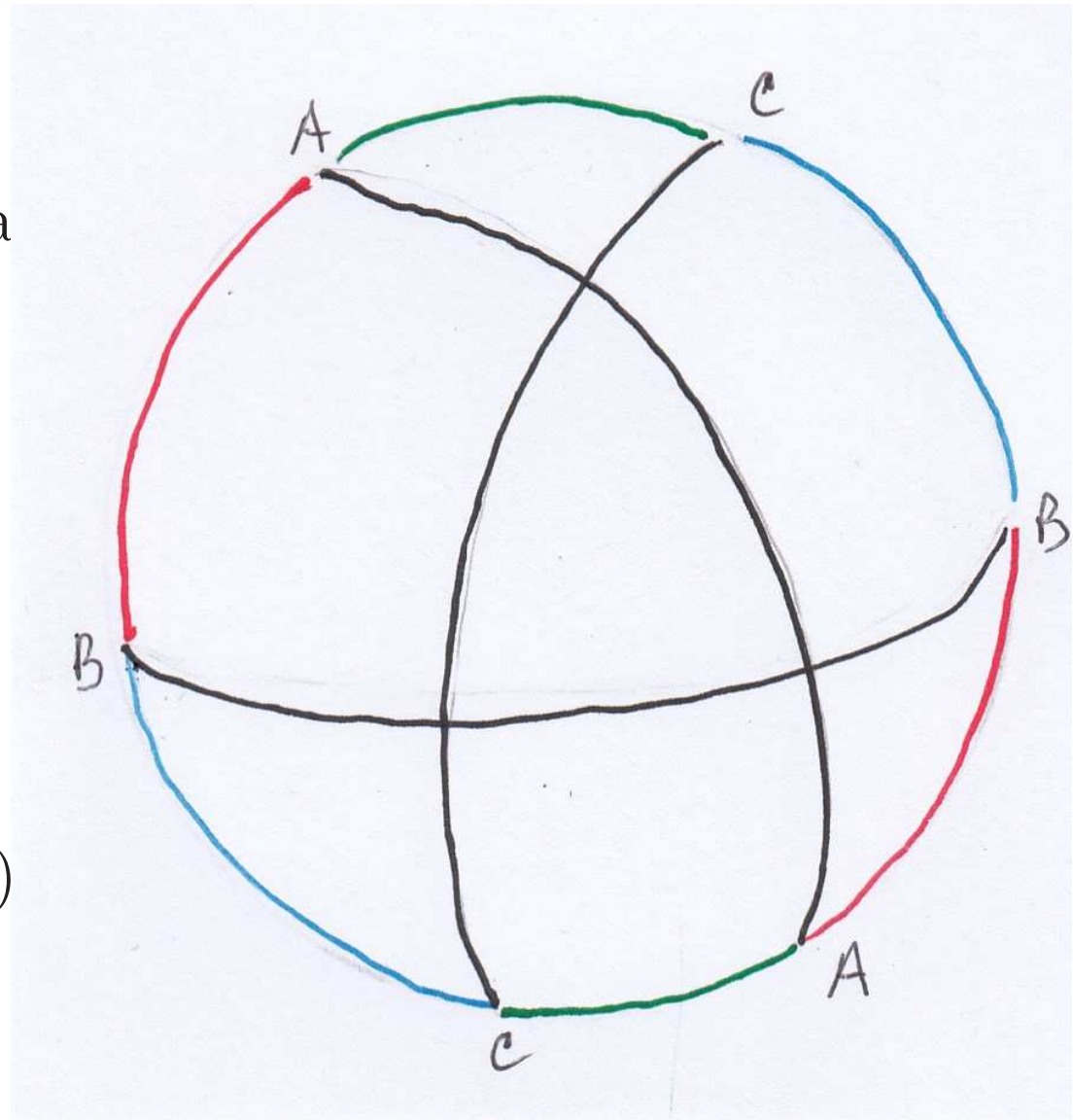
A to dowód (materialny!), że płaszczyzna eliptyczna nie mieści się w trójwymiarowej przestrzeni.



Zadania.

1. Wykaż, że cała płaszczyzna eliptyczna leży po jednej stronie każdej swojej prostej.

2. Wykaż, że na płaszczyźnie eliptycznej symetria osiowa jest też symetrią środkową (czyli jest nieorientowalna!)



(Mickiewicz) ... takie widzi świata koło,
jakie tępymi zakreśla oczy...

(Klein) Geometrie lokalnie zgodne z daną geometrią
są jej geometriami ilorazowymi
w działaniu jednostajnie nieciągłych podgrup jej izometrii.

słownik

izometria = przekształcenie nie zmieniające odległości

*grupa przekształceń = taki ich zbiór G , który zawiera identyczność,
jest zamknięty na złożenia*

i dla każdego $g \in G$ istnieje w G przekształcenie do niego odwrotne

podgrupa = część grupy będąca grupą

*grupa jednostajnie nieciągła = złożona z przekształceń odrzucających
każdy niestały punkt co najmniej o z góry daną odległość*

orbita = zbiór wszystkich obrazów punktu w przekształceniach z G

przestrzeń ilorazowa = przestrzeń orbit

metryka ilorazowa = minimum odległości punktów z orbit

(Klein) Istnieje pięć dwuwymiarowych rozmaitości,
na których możliwa jest geometria lokalnie euklidesowa:
płaszczyzna, walec, wstęga Moebiusa, torus, butelka Kleina,

przy czym odpowiednie grupy jednostajnie nieciągłe generują
identyczność, jedno przesunięcie, jedna symetria z poślizgiem, dwa
przesunięcia o różnych kierunkach, jedna symetria z poślizgiem i
jedno przesunięcie w innym kierunku.

Liczba tych geometrii jest różna:

1, 1, 1, dwa parametry rzeczywiste, jeden parametr rzeczywisty.

Warto zwrócić uwagę, że są
dwie możliwości dające geometrie nieorientowalne
i dwie dające geometrie ograniczone.

(Klein) Istnieją dwie rozmaitości, na których możliwa jest geometria o stałej krzywiznie dodatniej i nieskończenie wiele, na których można zrealizować geometrię o stałej krzywiznie ujemnej.

Ponadto wiadomo, jakie możliwe są dwuwymiarowe rozmaitości i algorytm sprawdzenia, czy dane dwie rozmaitości są różne.

Ponadto na każdej dwuwymiarowej rozmaitości można zrealizować co najmniej jedną geometrię o stałej krzywiznie.

Tej ostatniej własności nie mają rozmaitości wyżej wymiarowe.

Powstał też problem, jakie w ogóle są możliwe wysokowymiarowe rozmaitości.

(Andriej Markow, syn) Nie istnieje algorytm pozwalający sprawdzić, czy dane dwie rozmaitości wymiaru większego niż 3 są różne.

(Thurston) Na rozmaitościach trójwymiarowych możliwe jest tylko 8 różnych geometrii.

Hipoteza geometryzacyjna Każdą rozmaitość trójwymiarową można pociąć na takie kawałki, że na każdym z nich będzie możliwa jakaś geometria.

Próby rozwiązania tych obu problemów

chirurgie, czyli zmiany dyskretne; potoki, czyli zmiany ciągłe

Григорий Яковлевич Перельман (ur. 1966) tą drugą metodą rozwiązał oba te problemy.

Astrofizycy dziś twierdzą, iż z ich badań wynika, iż
“[Wszechświat jest płaski](#)”, co oznacza, że Wszechświat OTW
to fluktuacje rozmaitości o krzywiznie zero.

Gdyby mieli rację, to Wszechświat byłby jedną z 18 możliwych
rozmaitości, na których możliwa jest geometria euklidesowa,
czyli byłby jedną z przestrzeni ilorazowych
zwykłej trójwymiarowej przestrzeni.

Wśród nich jest 10 orientowalnych i 10 ograniczonych.
Tych, które są jednocześnie i ograniczone i orientowalne jest 6
i one (tzw. małe wszechświaty) są obecnie
najmodniejszym tematem badań.

Polecam [Nikulin, Shafarevich, Geometries and groups](#),
dostępne w sieci.

Warto zwrócić jeszcze uwagę na fakt, że fragmenty jednej geometrii mogą prezentować inną, tak jak powierzchnie w zwykłej przestrzeni euklidesowej.

