Geometrie Wszechświata.
9. O rozmaitościach
10. Geometrie wewnętrzne
11. Masa zakrzywia
materiały do ćwiczeń

Projekt „Matematyka dla ciekawych świata”

spisał: Michał Korch

11 maj 2017

1 Zadania łatwe

1. Narysuj na kartce mapę wymyślonego Stumilowego Lasu. Zaznacz na niej: chatkę Puchatka, drzewo z pszczołami oraz drzewo z domem Przemądrzałej Sowy. Na dole kartki wzdłuż krawędzi niech płynie Rzeka. Zakładając, że Twoja mapa ma skalę $1 : 10000$ (1 cm na mapie to 100 m w rzeczywistości), oblicz odległości pomiędzy chatką Puchatka, a:

   - drzewem z pszczołami,
   - drzewem z domem Przemądrzałej Sowy.

   w poszczególnych metrykach:

   (a) euklidesowej
   $$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2},$$

   (b) miejskiej
   $$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = |x_2-x_1|+|y_2-y_1|,$$

   (c) maksimum
   $$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \max(|x_2-x_1|,|y_2-y_1|),$$

   (d) dyskretnej
   $$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \begin{cases} 0 & \text{dla } (x_1,y_1)=(x_2,y_2) \\ 1 & \text{wpp.} \end{cases},$$

   (e) rzeki
   $$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \begin{cases} |y_2-y_1| & \text{dla } x_1=x_2 \\ |y_1|+|x_2-x_1|+|y_2| & \text{wpp.} \end{cases}.$$

2. Kołem o promieniu r o środku w punkcie (x, y) w metryce d nazywamy zbiór punktów odległych w tej metryce od punktu (x, y) o co najwyżej r. Narysuj na płaszczyźnie koła o promieniu $\frac{1}{4}$ i o promieniu 4 w następujących metrykach:
   - euklidesowej,
   - miejskiej,
   - maksimum.

3. Narysuj koła z poprzedniego zadania w metrykach:
   - dyskretnej,
   - rzeki.

4. Supremum „z czegoś" to najmniejsza liczba rzeczywista większa lub równa wszystkim liczbom „czegoś". Jeśli natomiast nie istnieje taka liczba rzeczywista, to mówimy, że supremum jest nieskończone. Średnicą zbioru A w danej metryce d nazywamy supremum z wartości odległości pomiędzy dwoma dowolnymi punktami zbioru A (i oznaczamy $d(A)$). Jaka jest średnica, w zwykłej metryce euklidesowej na płaszczyźnie:
   - koła o promieniu 1?
   - kwadratu o boku 1?
   - okręgu o promieniu 1?
   - odcinka $[0, 1]$?
   - odcinka $(0, 1)$?
   - zbioru $\{(x, y) : (x = 0 \wedge 0 < y < 1) \vee (0 < x < 1 \wedge y = 1) \vee (x = 1 \wedge 1 < y < 2) \vee (1 < x < 2 \wedge y = 2)\}$?
   - pierwszej ćwiartki $\{(x, y) : x > 0, y > 0\}$?
   - osi (OX)?

5. Czy można uprościć definicję średnicy, podaną w poprzednim zadaniu, w następujący sposób: „średnica to największa możliwa odległość pomiędzy dwoma punktami zbioru"? Kiedy taka definicja byłaby poprawna?
   Wskazówka: Rozważ przypadki z poprzedniego zadania.

6. Weźmy zbiór, który jest prostokątem o wierzchołkach w punktach $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(3, 4)$, $(0, 4)$ (oczywiście w zwykłym kartezjańskim układzie współrzędnych). Jaka jest średnica tego zbioru w metryce:
   - euklidesowej?
   - miejskiej?

7. Znajdź średnicę tego samego zbioru w metrykach:
   - maksimum,
   - dyskretnej,
   - rzeki.

8. Twierdzenie Eulera o wielościanach wypukłych mówi, że w dowolnym wielościanie wypukłym, jeśli s to liczba ścian, k to liczba krawędzi oraz w to liczba wierzchołków, to:

$$w + s - k = 2.$$

   Sprawdź, że twierdzenie to jest prawdziwe dla:

   (a) sześcianu,
   (b) ośmiościanu foremnego,
   (c) graniastosłupa prawidłowego o podstawie w postaci sześciokąta foremnego,
   (d) dwudziestościanu foremnego.

9. Sklej wstęgę Möbiusa i sprawdź co się stanie jeśli przetniesz ją wzdłuż w połowie jej szerokości. Dlaczego tak się dzieje? Otrzymaną pętlę przetnij znów wzdłuż w połowie jej szerokości. Co otrzymałeś?

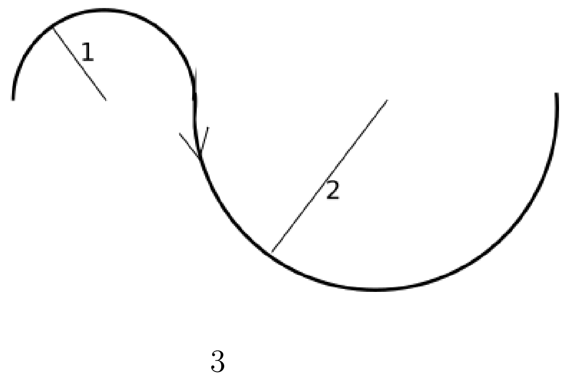
10. Sklej wstęgę Möbiusa i sprawdź co się stanie jeśli przetniesz ją wzdłuż w jednej trzeciej jej szerokości. Dlaczego tak się dzieje?

11. Postępuj podobnie, jak w zadaniu 9, ale tym razem przed sklejeniem skręć pasek papieru nie raz, a dwa razy. Co otrzymasz po przecięciu? A co będzie jeśli początkowy pasek papieru skręcisz trzy razy?

12. Postępuj podobnie, jak w zadaniu 10, ale tym razem przed sklejeniem skręć pasek papieru nie raz, a dwa razy. Co otrzymasz po przecięciu? A co będzie jeśli początkowy pasek papieru skręcisz trzy razy?

13. Rozważ litery alfabetu: ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWYZ. Które z nich są ze sobą homeomorficzne? Załóż, że poszczególne litery nie mają żadnych ozdobników – są po prostu złożone z cienkich kresek.
    Wskazówka: Np. C oraz Z są homeomorficzne, bo to po prostu powyginany odcinek. Nie są one homeomorficzne z E, bo E ma punkt, w którym zbiegają się kreski z 3 kierunków.

14. Mając daną krzywą na płaszczyźnie jej krzywizną w danym punkcie nazywamy odwrotność promienia okręgu stycznego do tej krzywej. Intuicyjnie możemy powiedzieć, że okrąg jest styczny do krzywej w danym punkcie, jeśli na mrówkę poruszającą się ze stałą prędkością po tej krzywej działa taka sama siła odśrodkowa, jak na mrówkę poruszającą się po tym okręgu w tym punkcie. Możemy też ustalić, że początkowa krzywa ma ustalony kierunek ruchu i zakręty w lewo mają krzywiznę dodatnią, a zakręty w prawo – ujemną. Znajdź wartość krzywizny krzywej narysowanej na poniższym rysunku w poszczególnych punktach.



15. Otwartym odcinkiem (a,b) na prostej rzeczywistej nazwiemy zbiór wszystkich punktów x takich, że $a < x < b$. Powiemy natomiast, że pewien podzbiór prostej jest otwarty, jeśli jest sumą dowolnie wielu odcinków otwartych. Zweryfikuj, że następujące zbiory są otwarte:

- $(0,1) \cup (3,4)$,
- $(0,1) \setminus \{\frac{1}{2}\}$,
- $(0,\infty)$,
- cała prosta rzeczywista $\mathbb{R}$.

Wskazówka: Zadanie polega na tym, żeby przedstawić powyższe zbiory jako sumę pewnej liczby (być może nieskończenie wielu) odcinków otwartych.

16. Trzy domy należy połączyć liniami z dostawcami gazu, wody i elektryczności. Linie nie mogą się przecinać ani przechodzić przez domy i dostawców. Spróbuj wykonać zadanie dla trzech domów znajdujących się na:

    (a) płaszczyźnie,

    (b) torusie?

2 Zadania trochę mniej łatwe niż łatwe

1. Sprawdź, że podane w zadaniu 1 z serii Łatwych wzory zadają dobrze zdefiniowane metryki na płaszczyźnie.
   Wskazówka: Przypominamy, że aby metryka była poprawnie określona, musi spełniać trzy warunki:

   - *po pierwsze, zerowa odległość oznacza, że jesteśmy w tym samym punkcie ($d(A,B) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A = B$);*
   - *po drugie, jest symetryczna ($d(A,B) = d(B,A)$);*
   - *po trzecie, spełnia nierówność trójkąta (czyli dla każdych trzech punktów A, B, C zachodzi $d(A,C) \leq d(A,B) + d(B,C)$).*

   W zadaniach chodzi więc o sprawdzenie tych trzech warunków.

   (a) Czy metryka maksimum jest faktycznie metryką?

   (b) Czy metryka dyskretna jest faktycznie metryką?

   (c) Czy metryka rzeki jest faktycznie metryką?

2. Poznaliśmy w zadaniach łatwych metryki: euklidesową, miejską, maksimum, dyskretną i rzeki. Zaproponuj swoją, inną, ciekawą metrykę na płaszczyźnie. Sprawdź, czy na pewno jest to metryka. Narysuj w niej powyżej wymienione koła i policz średnice wyżej zdefiniowanego prostokąta (patrz zadania łatwe).

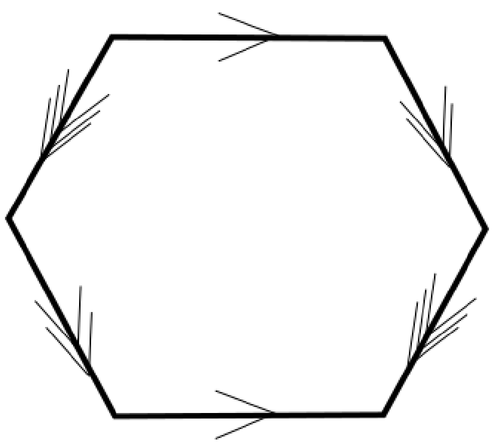
3. Znudzony na jakiejś ciekawej przerwie zaczęłaś/zacząłeś na karce w zeszycie rysować przylegające do siebie kolejne figury, tworząc pewną siatkę z nich złożoną. Powiedzmy, że liczba obszarów ograniczonych tymi figurami wynosi s (licząc łącznie z obszarem na zewnątrz narysowanej siatki), liczba krawędzi w siatce wynosi k, zaś liczba wierzchołków siatki wynosi w. Jaka zależność łączy te liczby? Dlaczego?
   Wskazówka: Skorzystaj z twierdzenia Eulera, patrz zadanie 8 z zadań łatwych.

4. Powiedzmy, że swoją siatkę z poprzedniego zadania narysowałaś/eś na sferze, a nie na płaszczyźnie. Czy coś zmieni się w tej zależności?

5. A co by było, gdyby siatkę z zadania 3 narysować na torusie? Jaka wtedy byłaby zależność?
   Wskazówka: Można rozciąć torus, w wyniku czego dojdą dwie dodatkowe ściany, a nasza siatka stanie się wielościanem.

6. Prowadzisz laboratorium, w którym przechowywane są niebezpieczne wirusy. Laboratorium zawiera 16 pokoi ułożonych w kwadracie 4×4. Z każdego pokoju są drzwi do każdego pokoju sąsiadującego z nią ścianą. Wejście do laboratorium prowadzi do jednego z narożnych pokoi, a wyjście z niego jest w narożnym pokoju po przekątnej względem pokoju wejściowego. W wyniku trzęsienia ziemi wszystkie pokoje, poza pokojem wejściowym zostały skażone niebezpiecznymi wirusami. Na szczęście posiadasz kombinezon ochronny, a każdy pokój jest wyposażony w dźwignię służącą do jego unicestwienia (które oczywiście dokonuje się po wyjściu z tego pokoju). Oczywiście do unicestwionego pokoju nie da się wrócić. Ponadto system bezpieczeństwa powoduje, że nie można opuścić skażonego pokoju bez pociągnięcia za dźwignię prowadzącą do jego unicestwienia. Czy dasz radę uratować świat i unicestwić wszystkie pokoje wchodząc do labu wejściem i bezpiecznie wychodząc wyjściem?
   Wskazówka: Pamiętaj, że wejściowy pokój nie jest skażony.

7. Wyobraź sobie rozciągliwy kawałem kawałek materiału w kształcie sześciokąta. Jaka powierzchnia powstanie po sklejeniu boków zgodnie ze strzałkami (sklejamy tego samego typu strzałki ze sobą)?



   Wskazówka: Narysuj kilka takich sześciokątów obok siebie. Następnie narysuj romb, którego wierzchołki to środki czterech takich sześciokątów. Jak sklejane są jego boki?

8. Mając dwuwymiarową powierzchnię w trójwymiarowej przestrzeni możemy zastanowić się nad jej krzywizną (patrz zadanie 14 z zadań łatwych). Po prostu przecinając tę powierzchnię w danym puncie płaszczyznami w różnych kierunkach dostajemy różne krzywe i różne ich krzywizny. Okazuje się, że zawsze w jednym kierunku taka krzywizna jest najmniejsza, a w prostopadłym kierunku jest największa – te dwie krzywizny nazywamy krzywiznami głównymi. Jeśli są powyginane w przeciwne strony to jednej z niej nadamy znak ujemny, a drugiej dodatni. Średnią krzywizną nazywamy ich sumę, zaś krzywizną Gaussa – ich iloczyn. Niech będzie dany walec o promieniu 1. Ile wynoszą jego krzywizny główne (w dowolnym punkcie)? Ile wynosi jego krzywizna średnia? A ile wynosi krzywizna Gaussa?

9. Podzbiór prostej nazywamy zbiorem domkniętym, jeśli jest dopełnieniem zbioru otwartego (patrz zadanie 15 z serii zadań łatwych). Zweryfikuj, że następujące zbiory są domknięte:

   - $\{2017\}$,
   - $[0,1]$ (punkty x takie, że $0 \leq x \leq 1$),
   - $\{0, 2017\}$,
   - $[0, \infty)$,
   - $\varnothing$ (zbiór pusty).

   Wskazówka: Zadanie polega na sprawdzeniu, że dopełnienia tych zbiorów da się przedstawić jako sumy odcinków otwartych.

10. Podaj przykład zbioru $A \subseteq \mathbb{R}$, który nie jest ani otwarty ani domknięty. Uzasadnij!

3 Zadania trudniejsze

1. Udowodnij twierdzenie Eulera o wielościanach wypukłych (patrz zadanie 8 z zadań łatwych).
   Wskazówka: Załóż, że wielościan zrobiony jest z rozciągliwej gumy. Jeśli usuniesz jedną ścianę da się go zatem rozprostować na płaszczyznę. Podziel teraz wszystkie ściany niebędące trójkątami na trójkąty, rysując odpowiednie przekątne (dojdą więc nowe ściany i krawędzie, ale zauważ, że wyrażenie po lewej stronie w twierdzeniu się nie zmieni). Następnie usuwaj trójkąty poczynając od tych najbardziej skrajnych. Jak usunięcie takiego trójkąta wpływa na wyrażenie po lewej stronie w twierdzeniu? Rozważ tu dwa przypadki: skrajny trójkąt może mieć jedną lub dwie krawędzie do których nie przylega żaden inny trójkąt.

2. Rozważ zadanie 5 z serii mniej łatwych niż łatwe w przypadku rozmaitości, która jest „torusem", ale nie z jedną dziurą, a z d dziurami. Jak będzie wyglądać twierdzenie Eulera na takiej powierzchni?

3. Wykaż korzystając z twierdzenie Eulera o wielościanach, że nie można połączyć domów z zadania 8 z zadań łatwych, leżących na płaszczyźnie do wszystkich trzech dostawców.
   Wskazówka: Siatka, którą utworzyłyby połączenia domów miałaby 6 *wierzchołków (*3 *domy i* 3 *dostawców) i* 9 *połączeń.*

4. Rozważ zadanie z laboratorium (patrz zadanie 6 z serii zadań mniej łatwych niż łatwe). Co by było, gdyby pokój wejściowy też był skażony? Czy wtedy da się ocalić świat?

Wskazówka: Pokoloruj pokoje tak, jak jest pokolorowana szachownica. Zauważ, że wejście i wyjście będą różnych kolorów.

5. Dany jest torus, którego promień wewnętrznego równika wynosi 1, zaś promień zewnętrznego równika wynosi 5. Jakie są jego krzywizny: główne, średnia i Gaussa (patrz zadanie 8 z serii zadań mniej łatwych niż łatwe) w:

   - punkcie położonym na wewnętrznym równiku,
   - punkcie położonym na zewnętrznym równiku.

Literatura dodatkowa

[1] Krzysztof Ciesielski and Zdzisław Pogoda. *Bezmiar matematycznej wyobraźni.* Wiedza Powszechna, Warszawa, 1995. rozdziały 6 i 7.

[2] Richard Courant, Herbert Robbins, and Ian Stewart. *Co to jest matematyka?* Prószyński i S-ka, Warszawa, 1998. rozdziały: V.2, V.3 i V.4.

[3] Tony Crilly. *50 teorii matematyki.* PWN, Warszawa, 2009. rozdziały: 23, 29, 48.

[4] Richard Feynman. *Sześć trudniejszych kawałków.* Prószyński i S-ka, Warszawa, 1999. rozdział 10.

[5] David Filkin. *Wszechświat Stephena Hawkinga.* Rebis, Poznań, 1998. rozdział 5.

[6] John Gribbin and Mary Gribbin. *Czas i przestrzeń.* Arkady, Warszawa, 1995. rozdziały: 19, 20 i 21.

[7] Stephen Hawking. *Krótka historia czasu.* Alfa, Warszawa, 1990. rozdział 2 i 6.

[8] Stephen Hawking. *Wszechświat w skorupce orzecha.* Zysk i S-ka, Poznań, 2002. rozdziały: 1 i 2.

[9] Stephen Hawking. *Ilustrowana teoria wszystkiego.* Zysk i S-ka, Poznań, 2004. rozdziały 3.

[10] Szczepan Jeleński. *Śladami Pitagorasa.* WSiP, Warszawa, 1995. rozdział: VI.4.

[11] Marek Kordos. *Wykłady z historii matematyki.* Script, Warszawa, 2005. rozdziały: 15, 19 i 21.

[12] Nigel Langdon and Charles Snape. *Ścieżki matematyki.* Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, Gdańsk, 1998. rozdział 24.

[13] Jay Orear. *Fizyka, tom 1.* WNT, Warszawa, 1998. rozdział 9.

[14] Roger Penrose. *Makroświat, mikroświat i ludzki umysł.* Prószyński i S-ka, Warszawa, 1997. rozdział 1.

[15] Roger Penrose. *Nowy umysł cesarza.* PWN, Warszawa, 2000. rozdziały V.12 i V.15.

[16] Paweł Strzelecki. *Matematyka współczesna dla myślących laików.* Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawaskiego, Warszawa, 2015. rozdziały 4, 5 i 9.