Geometrie Wszechświata.
6.-7. Czwarty wymiar to czas
materiały do ćwiczeń

Projekt „Matematyka dla ciekawych świata”
spisał: Michał Korch i Piotr Morawiecki

6 kwietnia 2017

Szczególna teoria względności (i czasoprzestrzeń) w pigułce

Idea

Punkt startu dla szczególnej teorii względności to fizyka z prawami zaobserwowanymi przez Galileusza i Newtona. W szczególności już dawno ludzie mieli świadomość względności, chociażby ruchu. Obserwujemy ją codziennie, może najbardziej odczuwamy tę względność siedząc w pociągu, gdy za oknem przesuwa się inny pociąg. Bez dodatkowych informacji, nie jesteśmy w stanie określić, czy to nasz pociąg, czy tamten porusza się względem ziemi. Wiemy jedynie, że poruszają się względem siebie. Inaczej mówiąc, pasażer pociągu A widzi, że pociąg B porusza się względem niego, a pasażer pociągu B widzi, że pociąg A porusza się względem niego. O wrażeniach pasażerów będziemy mówić jako o obserwacjach z różnych układów odniesienia. Jesteśmy przyzwyczajeni do patrzenia z punktu widzenia układu odniesienia związanego z Ziemią, dlatego jesteśmy skłonni mówić, że coś stoi, a coś innego się porusza, ale to tylko kwestia naszego przyzwyczajenia – przecież sama Ziemia porusza się względem Słońca, a Słońce względem środka naszej Galaktyki i tak dalej – każdy ruch jest względny. Gdy mówimy, że coś się porusza z jakąś prędkością, zawsze jest to prędkość względem czegoś innego, inaczej mówiąc mierzona w pewnym układzie odniesienia, a w innym układzie odniesienia może być zupełnie inna. Samochód poruszający się 100 km/h względem drogi, stoi względem swojego kierowcy i porusza się z prędkością 200km/h względem samochodu nadjeżdżającego z naprzeciwka z prędkością 100km/h względem drogi.

Natomiast czas wydawał się zawsze ludziom bezwzględny. W takim sensie, że płynie tak samo dla każdego obserwatora.

Okazało się następnie w wyniku obserwacji księżyców Jowisza, że światło też porusza się z pewną skończoną prędkością. Wyliczono nawet tę prędkość – jest to prędkość

$$c = 299792458 \text{m/s} = 1097252850 \text{km/h}.$$

Ale skoro tak, to powinniśmy zmierzyć inną prędkość światła w różnych układach – jeśli ktoś się porusza 1000km/h na przeciw wiązki światła, powinien obserwować jej prędkość o 1000km/h większą niż ten, kto stoi. Ale doświadczalnie pokazano, że to nieprawda. Prędkość światła wynosi tyle samo w każdym układzie odniesienia. Zawsze tyle samo. Nie jest względna, co nie zgadza się z przewidywaniami teorii Galileusza i Newtona, która przecież tak dobrze się do tej pory sprawdzała w przypadku wszystkich relatywnie małych prędkości.

Rozwiązanie tego problemu znalazł Einstein, wykorzystując przy tym prace wielu innych wielkich uczonych, chociażby Poincarego i Lorentza. Sformułował szczególną teorię względności.

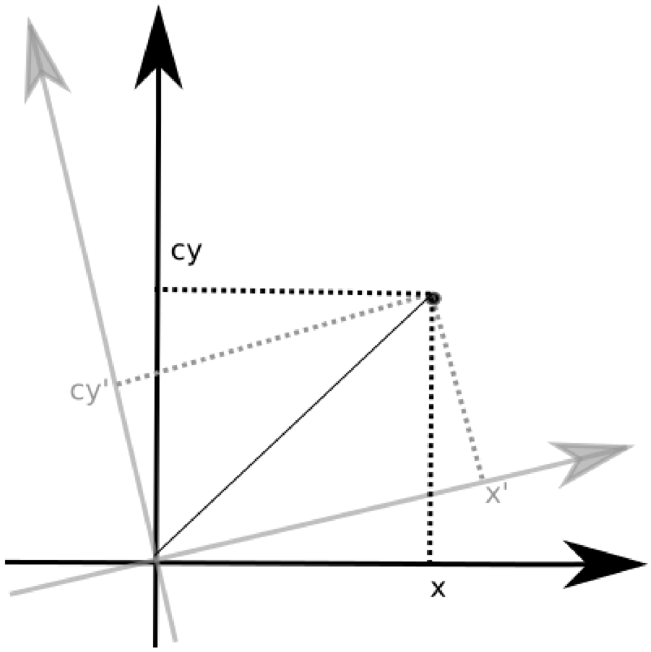
Opowieść o geometrach

Zanim jednak przejdziemy do teorii Einsteina, wyobraźmy sobie analogiczną, w pewnym sensie, a jednak prostszą sytuację. Za siedmioma morzami, za siedmioma górami była sobie pewna osada. W osadzie tej funkcjonowały dwie szkoły geometrii prowadzone przez Geometrę Dziennego i Geometrę Nocnego. Geometra Dzienny i jego uczniowie wyznaczali kierunki świata, w tym północ, względem położenia słońca. Natomiast Geometra Nocny i jego adepci używali w tym celu Gwiazdy Polarnej. A wyznaczanie północnego kierunku było o tyle istotne, że tutejsza religia uważała, że w tamtym kierunku znajduje się siedziba bogów i wszelkie odległości w kierunku północ-południe mierzono w świętych milach. Natomiast odległości w kierunku wschód-zachód mierzono po prostu w kilometrach. A więc odległości do miejsc podawano jako parę liczb (x, y) – x oznacza ile kilometrów trzeba przejść na zachód (powiedzmy, że jeśli liczba jest ujemna, to trzeba iść na wschód) i y – ile świętych mil trzeba przejść na północ (znów, powiedzmy, że ujemna liczba świętych mil wskazywała kierunek południowy).

Niestety kierunek północy wyznaczany na podstawie położenia słońca przez Geometrę Dziennego różnił się nieco od kierunku północnego wyznaczanego na podstawie gwiazdy polarnej przez Geometrę Nocnego. Dlatego, dystans (czyli para liczb) z osady do danego punktu mierzony przez Geometrę Dziennego różnił się od tego mierzonego przez Geometrę Nocnego. Uczniowie Geometrów sprzeczali się wielokrotnie, która szkoła podaje prawidłowe wyniki. Wyniki jednej szkoły były nieprzydatne i mylące z punktu widzenia drugiej ze szkół.

Kłócili by się pewnie bez końca, gdyby do osady nie przybył Podróżnik. Podróżnik, badając lokalne zwyczaje i kulturę, spędził dzień wśród uczniów Geometry Dziennego i noc wśród uczniów Geometry Nocnego. Następnie odespał trochę i wpadł na rewolucyjny dla lokalnej społeczności pomysł. Trzeba przeliczyć święte mile na kilometry. Nie jest to trudne. Szybko stwierdził, że kilometr to jakieś 1200 kroków, a święta mila to koło 2000 kroków, z tym że w innym kierunku. A zatem można powiedzieć, że święta mila to około $1,67$ kilometra. Nazwał tę stałą c i przeliczył wszystkie składowe dystanse północ-południe mierzone przez Dziennego i Nocnego geometrę na kilometry, mnożąc je przez c. Teraz, ponieważ był wykształconym geometrą zastosował Twierdzenie Pitagorasa – i zauważył, że jeśli (x, y) to dystans z osady do pewnego punktu mierzony przez Geometrę Dziennego, a (x', y') to dystans do tego samego punktu zmierzony przez Geometrę Nocnego, to po przeliczeniu:

$$\sqrt{x^2 + (cy)^2} = \sqrt{x'^2 + (cy')^2}.$$



Wielkość tą nazwał interwałem i doszedł do wniosku, że w pomiarach Geometry Dziennego i Nocnego nie ma żadnej sprzeczności – po prostu ich układy odniesienia są obrócone względem siebie. Mierzą te same interwały – i można w ten sposób pomiary jednego z nich przeliczyć na pomiary drugiego, godząc ze sobą obie szkoły.

Jednostki

Wróćmy do naszej rzeczywistej sytuacji. Geometrom: Dziennemu i Nocnemu będą u nas odpowiadać dwaj obserwatorzy, którzy poruszają się względem siebie z pewną stałą prędkością, którą oznaczmy v, a ta rewolucyjna zmiana związana z przeliczeniem jednostek w kierunku północnym ze świętych mil na kilometry, u nas będzie się wiązała z czasem.

Często z resztą mówimy, że żyjemy w czterowymiarowej przestrzeni, jeśli uwzględnimy czwarty wymiar – czas. Tą przestrzeń nazywamy czasoprzestrzenią. Jesteśmy jednak przyzwyczajeni do tego, że mierzymy odległości w tym czwartym wymiarze w innych jednostkach (sekundach), niż w pozostałych, przestrzennych wymiarach. W sumie podobnie do przyzwyczajeń mieszkańców osady i mierzenia północnego kierunku w świętych milach. No więc nasze rozważania musimy zacząć od przeliczenia sekund na metry lub na odwrót metrów na sekundy.

Z pomocą przychodzi właśnie prędkość światła. Okazało się, że jest ona taka sama w każdym układzie odniesienia i wynosi c. Możemy więc z tego skorzystać i powiedzieć, że czas mierzymy w metrach przebytych przez światło. Skoro $c = 299792458$m/s, to jedna sekunda to 299792458m. Czyli czas t mierzony w sekundach, to ct metrów. I tyle.

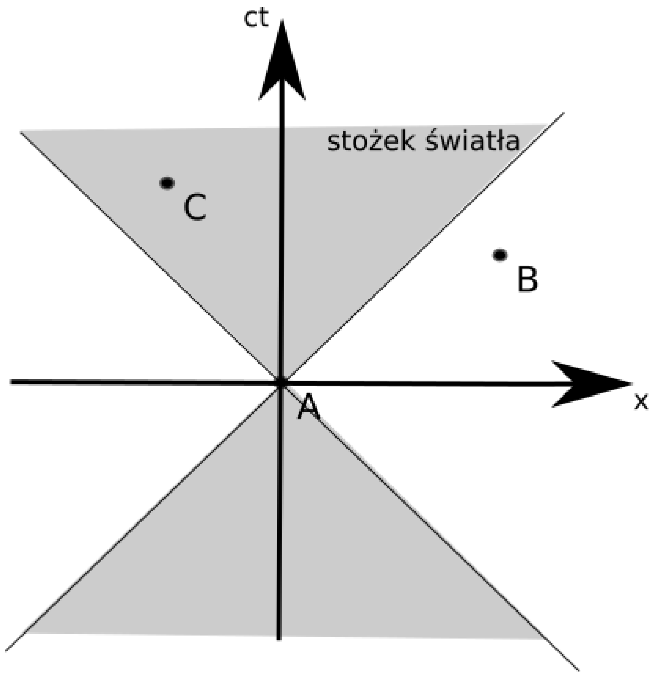
Oczywiście możemy też postąpić na odwrót i przeliczać dystanse na czas, jaki potrzebuje światło na jego pokonanie. Wygodne to jest zwłaszcza, gdy rozmawiamy o dystansach kosmicznych. Czyli jeśli mamy x metrów to jest to x/c sekund (często dodajemy przymiotnik świetlnych). Na pewno słyszeliście np., że najbliższa do słońca gwiazda, czyli Alfa Centauri jest odległa o $4,37$ lat (świetlnych).

Jednostki to oczywiście nie wszystko, ale zanim przejdziemy do najważniejszych założeń szczególnej teorii względności, nauczmy się rysować czasoprzestrzeń.

Czasoprzestrzeń

Narysujmy zatem czasoprzestrzeń. Punkty w czasoprzestrzeni zwykło nazywać się wydarzeniami. Dla uproszczenia będziemy rysować tylko jedną oś przestrzenną, czyli x, a pionowo narysujemy oś czasu. Wygodnie będzie przemnożyć od razu wartości czasu na tej osi przez prędkość światła c, czyli inaczej mówiąc przeliczyć od razu jej jednostki. Jeśli chcemy zaznaczyć drogę światła w tej czasoprzestrzeni, to łatwo zauważyć, że będzie to linia prosta nachylona pod kątem $45°$ – rzeczywiście w czasie jednej sekundy, światło przebywa odległość jednej sekundy (świetlnej).

Wiąże się z tym jeden ważny wniosek: skoro światło porusza się w ten sposób, a nic nie porusza się szybciej niż światło, to informacja o zdarzeniu, które stało się tu i teraz może dotrzeć tylko i wyłącznie (i wpłynąć tylko i wyłącznie) na zdarzenia wewnątrz stożka utworzonego przez linie światła zaczynające się tu i teraz. Tak samo tylko wydarzenia z przeszłości, które są w stożku światła z przeszłości, mogą wpłynąć na to, co się dzieje teraz. Czyli na poniższym rysunku, zdarzenie A nie jest obserwowalne w chwili i miejscu B (bo światło, ani nic innego tam „nie zdąży"), za to może wpłynąć na zdarzenie C.

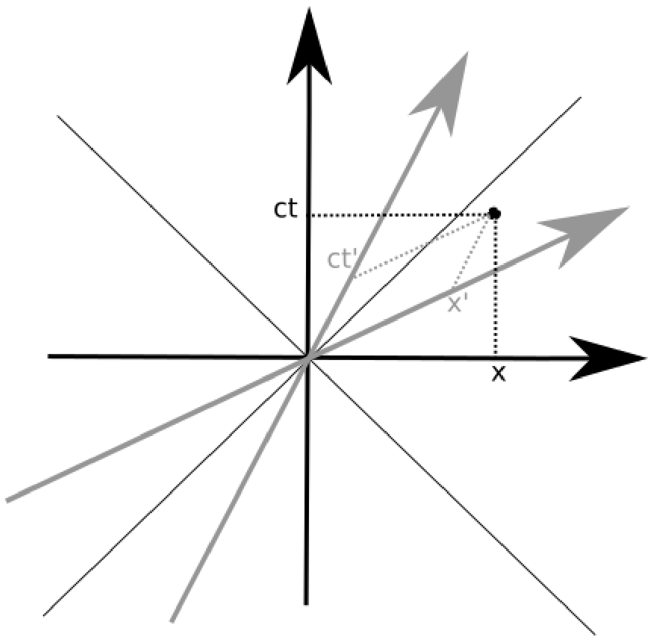


Transformacja Lorentza

Załóżmy zatem, że mamy dwóch obserwatorów (podobnie jak mieliśmy dwóch Geometrów), którzy poruszają się względem siebie z pewną stałą prędkością, którą oznaczmy v. Ich obserwacje wydają się jakby trochę sprzeczne. Pierwszy z nich widzi, że drugi się porusza z prędkością v względem niego, a drugi widzi, że pierwszy z nich porusza się z prędkością v względem niego, tyle że w przeciwną stronę. Ale jak wiemy, w tym nie ma jeszcze żadnej sprzeczności – problem jest w tym, że obaj obserwują, że ta sama wiązka światła porusza się z tą samą prędkością, mianowicie c, względem ją obserwującego – mimo że pierwszemu obserwatorowi mogło by się wydawać, że drugi powinien zmierzyć prędkość światła równą $v + c$. Ale nie – obaj widzą, że światło się porusza z prędkością c. Brzmi na sprzeczność i obserwatorzy mogliby się kłócić niczym szkoły dwóch geometrów.

Rolę godzącego szkoły Podróżnika, odegra tu szczególna teoria Einsteina, która godzi te pozorne sprzeczności. Wystarczy tylko zdać sobie sprawę, że podobnie jak kierunek północy obserwowany przez Geometrów, tutaj „kierunek” czasu w pomiarach obu obserwatorów jest inny. Mówiąc inaczej, czas nie jest absolutny, a jest względny i zależy od obserwatora! Bezwzględne są prawa fizyki, do których należy stała prędkość światła. A względna jest nie tylko prędkość, ale i czas.

Ale to jeszcze nie koniec. Skoro prędkość światła musi być taka sama z punktu widzenia każdego z dwóch obserwatorów, to trzeba też „przekręcić” oś x, ale nie w tę samą stronę – bo zawsze linia światła musi być dwusieczną pomiędzy osiami. Sekunda (świetlna) w przestrzeni, musi odpowiadać sekundzie w czasie – u każdego obserwatora. Widać to na poniższym rysunku[1].



Jak zatem przeliczyć pomiary pierwszego obserwatora na pomiary drugiego, który porusza się względem pierwszego ze stałą prędkością v? Otóż po przeliczeniu wszystkiego okazuje się, że chodzi tu o tzw. transformację Lorentza, która została opisana jeszcze na 10 lat przed tym, jak Einstein sformułował swoją szczególną teorię względności. Jeśli wydarzenie A z perspektywy pierwszego obserwatora ma czasoprzestrzenne współrzędne (x, y, z, t), to według drugiego obserwatora będzie miało współrzędne (x', y', z', t'), gdzie:

$$\begin{cases} x' = \gamma x + \gamma v t, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = \gamma t + \gamma \frac{v}{c^2} x \end{cases},$$

gdzie

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

[1]Uwaga: tak naprawdę czas nie tylko się „obraca”, ale i „wyciąga” – inaczej mówiąc centymetr na osi ct i centymetr na osi ct' niekoniecznie odpowiadają równym czasom obserwowanym przez jednego i drugiego obserwatora. W szczególności ten poglądowy rysunek świetnie nadaje się do określania kolejności zdarzeń i równoczesności z punktu widzenia każdego z obserwatorów, ale trzeba być ostrożnym, jeśli chce się go użyć do porównywania upływu czasu.

Zauważ w szczególności, że jeśli prędkość v jest mała w stosunku do c (a tak jest w przypadku codziennych, ziemskich prędkości), to $\gamma \simeq 1$ oraz czas $t' \simeq t$ staje się w praktyce pojęciem bezwzględnym.

To spostrzeżenie Einsteina, że jeśli rzeczywiście tak jest, że czas jest względny, to w obserwowanych pomiarach i zjawiskach nie ma sprzeczności, było spostrzeżeniem przełomowym. Ale też wiązało się z wieloma konsekwencjami, które choć mogą wydawać się nieintuicyjne, zostały potwierdzone.

Interwał czasoprzestrzenny i geometria Minkowskiego

No dobrze, w takim razie, co pełni rolę interwału w tej czasoprzestrzennej geometrii? Inaczej mówiąc jak zdefiniować pojęcie dystansu do danego punktu czasoprzestrzennego, tak żeby była ona taka sama dla obu obserwatorów, którzy poruszają się względem siebie z pewną prędkością v? W opowieści o Geometrach Nocnym i Dziennym, okazała się nim odległość „euklidesowa" po przeliczeniu jednostek, czyli:

$$\sqrt{x^2 + (cy)^2} = \sqrt{x'^2 + (cy')^2}.$$

W przypadku czasoprzestrzeni, jest podobnie, ale ponieważ układy nie tyle się obracają, a podlegają opisanej wyżej transformacji Lorentza, okazuje się (co można sprawdzić podstawiając po poniższego wzoru transformację Lorentza), $x^2 + y^2 + z^2$, trzeba by było wziąć z minusem. Inaczej mówiąc, jeśli (x, y, z, t) to współrzędne w czasoprzestrzeni pewnego punktu wedle obserwacji pierwszego obserwatora, a (x', y', z', t'), to takie współrzędne, opisane przez drugiego obserwatora, poruszającego się z prędkością v względem pierwszego z nich, to:

$$\sqrt{-x^2 - y^2 - z^2 + (ct)^2} = \sqrt{-x'^2 - y'^2 - z'^2 + (ct')^2}$$

i jest to tak zwany interwał czasoprzestrzenny pomiędzy „tu i teraz", a tym wydarzeniem.

Ogólnie rzecz biorąc, jeśli wydarzenie A ma w układzie pewnego obserwatora współrzędne czasoprzestrzenne (x_A, y_A, z_A, t_A), a wydarzenie B w tym samym układzie ma współrzędne (x_B, y_B, z_B, t_B), to interwał czasoprzestrzenny pomiędzy nimi to:

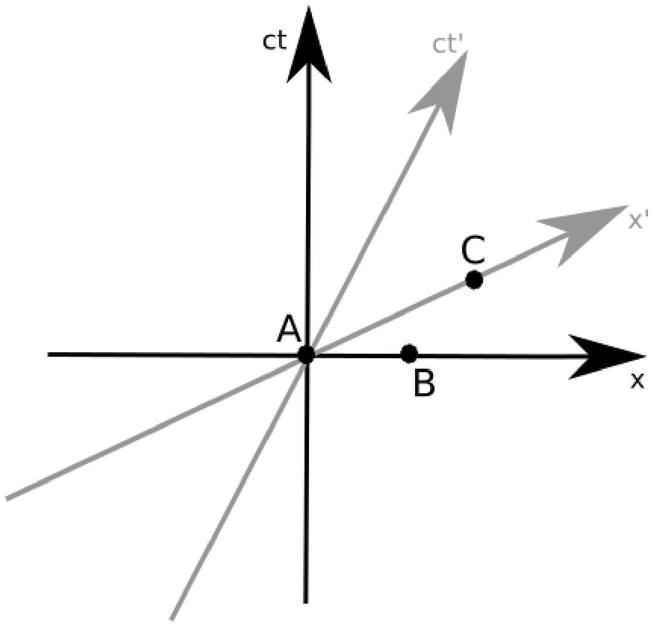
$$\sqrt{-(x_B - x_A)^2 - (y_B - y_A)^2 - (z_B - z_A)^2 + (ct_B - ct_A)^2}.$$

Jeśli potraktować powyższe wyrażenie, jako definicję „odległości" w czasoprzestrzeni dostajemy nową geometrię, zwaną geometrią Minkowskiego, która jest zupełnie nieeuklidesowa.

Zauważmy w szczególności, że interwał czasoprzestrzenny jest zdefiniowany jedynie dla punktów, które leżą wewnątrz swoich stożków światła! Jeśli tak nie jest, to wartość pod pierwiastkiem jest bowiem ujemna. Za to jeśli wydarzenia A i B łączy linia światła, to odległość przestrzenna dokładnie jest równa czasowi, jaki potrzebuje światło na jego pokonanie (po przeliczeniu jednostek), więc: $(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 = (ct_B - ct_A)^2$. Czyli w tym przypadku interwał czasoprzestrzenny wynosi 0!

Jednoczesność

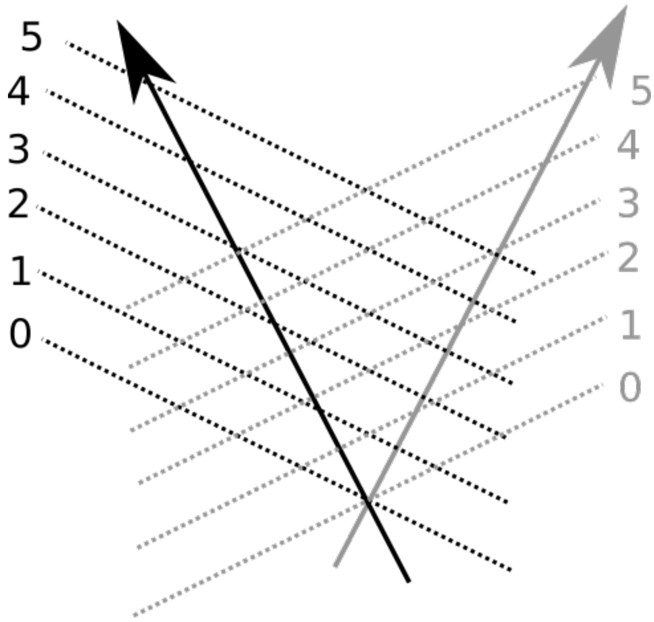
Widać zatem, że skoro czas jest względny, to pojęcie jednoczesności zdarzeń jest też względne. To znaczy, że wydarzenia, które są jednoczesne według jednego obserwatora, mogą takie nie być zdaniem innego. Rzeczywiście, zdarzenia które są jednoczesne z „tu i teraz" dla obserwatora, to te, które mają $t = 0$ według jego pomiarów (na naszym uproszczonym rysunki z jedną osią przestrzenną, muszą więc po prostu leżeć na tej osi). Dla drugiego obserwatora, który porusza się względem pierwszego z pewną prędkością, są to wydarzenia, których czas on mierzy jako $t' = 0$. Czyli poniższe zdarzenia A i B są jednoczesne dla obserwatora X, za to nie są równoczesne dla obserwatora X'. Natomiast wydarzenia A, C są jednoczesne dla X', a nie są dla X.



Dylatacja czasu

Kolejną konsekwencją szczególnej teorii względności jest tzw. dylatacja czasu. Chodzi o to, że stojący obserwator zmierzy, że czas poruszającego się obserwatora płynie wolniej. To, że tak jest widać na poniższym rysunku. Zaznaczono tu dwóch obserwatorów, którzy poruszają się względem siebie – konkretnie jeden porusza się w lewo, a drugi w prawo[2]. Na każdej osi zaznaczyliśmy tyknięcia zegarków poszczególnych obserwatorów. Zauważ, że z punktu widzenia lewego obserwatora trzecie tyknięcie zegarka prawego obserwatora jest jednoczesne z piątym tyknięciem jego własnego zegarka! I na odwrót – zdaniem prawego obserwatora w momencie, gdy jego zegarek tyknie piąty raz, zegarek lewego obserwatora tyka dopiero po raz trzeci!

[2]Rysunek celowo narysowany jest symetrycznie, tak by wiadomo było, że $1cm$ na każdej z osi czasów obydwu obserwatorów oznacza tyle samo czasu, co nie zawsze jest prawdą – patrz poprzedni przypis.



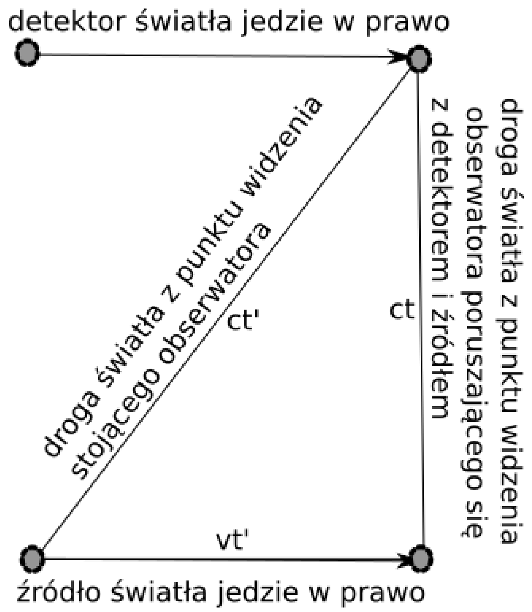
Lewy obserwator obserwuje, że czas prawego obserwatora płynie wolniej. Ale też prawy obserwator obserwuje, że czas lewego obserwatora płynie wolniej. Ta sprzeczność jest tylko pozorna – czas po prostu jest względny.

Jak dokładnie te czasy się przeliczają można zobaczyć korzystając z wypisanych wzorów transformacji Lorentza. Zaznaczony punkt ma współrzędne związane z lewym układem $x = 0$ oraz t, co podstawiając do transformacji Lorentza daje nam czas zmierzony w prawym układzie:

$$t' = \gamma t + 0 = \gamma t,$$

czasu. Ponieważ zawsze $\gamma \geq 1$, to jasne jest, że $t' \geq t$, co jest zgodne z naszym wnioskiem, że zdaniem prawego obserwatora jego zegarek tyknął więcej razy niż zegarek lewego podróżnika.

Dylatację czasu można też po prostu wyliczyć korzystając z twierdzenia Pitagorasa. Wyobraźmy sobie źródło światła i detektor położone pionowo, które razem poruszają się w prawo z prędkością v. Załóżmy, że obserwator poruszający się razem z detektorem zauważy, że po czasie t światło dotarło od źródła do detektora. Ponieważ poruszało się z prędkością c, to pokonało dystans ct. Obserwator związany z ziemią zmierzył ten czas jako t'. Zauważył więc, że w tym czasie cały poruszający się w prawo układ źródła światła i detektora pokonał odległość vt'. Natomiast światło pokonało jego zdaniem odległość ct', bo leciało przez czas t' z prędkością c.



Tak się składa, że ta droga pokonana jego zdaniem przez światło to przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego, czyli z tw. Pitagorasa

$$(ct')^2 = (vt')^2 + (ct)^2,$$

czyli:

$$t'^2 = \frac{c^2t^2}{c^2 - v^2},$$

więc ostatecznie:

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}t = \gamma t.$$

Skrócenie Lorentza

Jest jeszcze jedna ważna konsekwencja szczególnej teorii względności – okazuje się, że poruszające względem obserwatora obiekty są jego zdaniem krótsze w kierunku ich ruchu, niż gdyby względem niego stały. To zjawisko nazywa się skróceniem Lorentza.

Aby je zrozumieć musimy najpierw zrozumieć, co to znaczy długość rzeczy. A znaczy to odległość pomiędzy początkiem i końcem jakiegoś obiektu zaobserwowanych jednocześnie. Musimy jednocześnie zmierzyć położenie początku i końca obiektu, żeby poznać jego długość. To, że robimy to jednocześnie jest dla nas kluczowe i trzeba o tym pamiętać, bo przecież jednoczesność okazała się względna.

Wyobraźmy sobie zatem poziomo ułożoną rakietę poruszającą się poziomo z prędkością v. Załóżmy, że próbujemy zmierzyć długość tej rakiety patrząc na nią z ziemi. W układzie związanym z rakietą jej początek i koniec spoczywają, a zatem niech początek będzie położony w początku układu współrzędnych $x'_A = 0$, zaś koniec w taki razie wypada w punkcie $x'_B = l$, gdzie l jest długością rakiety zmierzoną w tym układzie (czyli w układzie względem którego rakieta stoi) – z punktu widzenia tego układu te obiekty znajdują się tam w każdym czasie t'. Powiedzmy teraz, że człowiek stojący na ziemi dokonuje pomiaru położeń początku i końca rakiety dokładnie wtedy, gdy początek go mija. Czyli początek jest również w punkcie $x_A = 0$. W tej samej chwili musi zmierzyć położenie końca x_B, czyli w czasie $t = 0$. Z transformacji Lorentza wiemy, że:

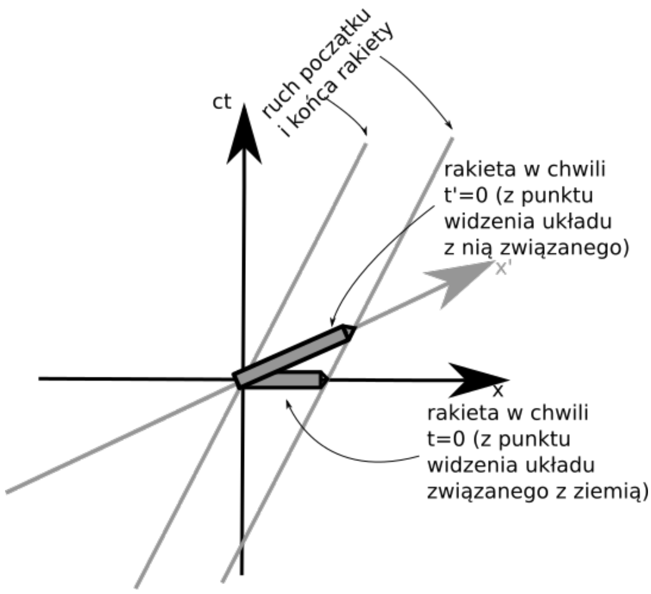
$$x'_B = \gamma x_B + \gamma vt = \gamma x_B,$$

czyli $x_B = l/\gamma$, a zatem zmierzona przez stojącego obserwatora długość rakiety to:

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} l,$$

gdzie l to długość rakiety mierzona z punktu widzenia układu z nią związanego (czyli tak jakby się nie poruszała).

Raz jeszcze warto podkreślić, że ważną rolę w tym zjawisku odgrywa względność jednoczesności, która jest ważna dlatego, że pomiar długości oznacza jednoczesny, z punktu widzenia danego obserwatora, pomiar położenia początku i końca obiektu. Pokazuje to też poniższy rysunek.



Energia

To jeszcze kilka słów prowadzących do słynnego wzoru Einsteina opisującego energię. Zastanawiając się nad definicją pędu w szczególnej teorii mnogości, można dojść do wniosku, że ma sens następująca definicja. Powiemy że ciało o masie m i prędkości v względem pewnego obserwatora, ma energię:

$$E = m\gamma c^2,$$

gdzie przypomnijmy, że $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$. W szczególności, jeśli ciało to pozostaje w spoczynku ($v = 0$), to $\gamma = 1$ i jego energia to:

$$E = mc^2.$$

Ponadto okazuje się, że dla relatywnie małych prędkości v, ma sens przybliżenie:

$$\gamma \simeq \left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right),$$

a zatem energia to:

$$E \simeq mc^2 + \frac{1}{2}mv^2,$$

co zgadza się z klasyczną definicją energii kinetycznej – mianowicie energia poruszającego się ciała to jego energia spoczynkowa mc^2 plus jego energia kinetyczna $\frac{1}{2}mv^2$.

Sama koncepcja energii spoczynkowej sugeruje, że masa sama w sobie zawiera ogromną ilość energii mc^2. Ma to różne konsekwencje, w szczególności otworzyło drogę do myślenia o energii jądrowej. Jeśli masa zostanie w pewien sposób zmniejszona, to uwolni się energia równa zmianie masy przemnożonej przez c^2. Nawet jeśli zostanie wyzwolona tylko mikroskopijna część energii spoczynkowej, da to miliony razy więcej energii niż konwencjonalne źródła.

1 Zadania łatwe

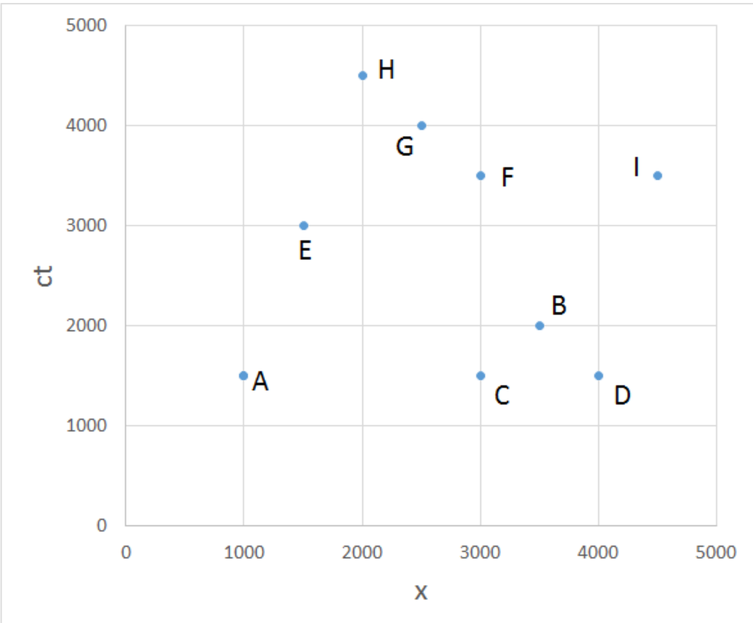
1. Znajdź w Internecie grę VelocityRaptor. Przejdź pierwsze 8 lub więcej poziomów. Jakie zjawiska relatywistyczne zaobserwowałaś/eś, gdy prędkość światła była bliska prędkości dinozaura?

2. Uzupełnij poniższą tabelkę.

m	km	s świetlne	lata świetlne
250			
	1000000		
		60	
			0,2

Wskazówka: $c = 299792458 m/s$. *Użyj kalkulatora lub załóż, że* $c = 300000000 m/s$.

3. Rozważ poniższe punkty na rysunku przestawiającym czasoprzestrzeń. Które pary z nich mogą być związane związkiem przyczynowo-skutkowym? Znajdź zdarzenia, na które mogą wpłynąć zarówno zdarzenie A, jak i B.

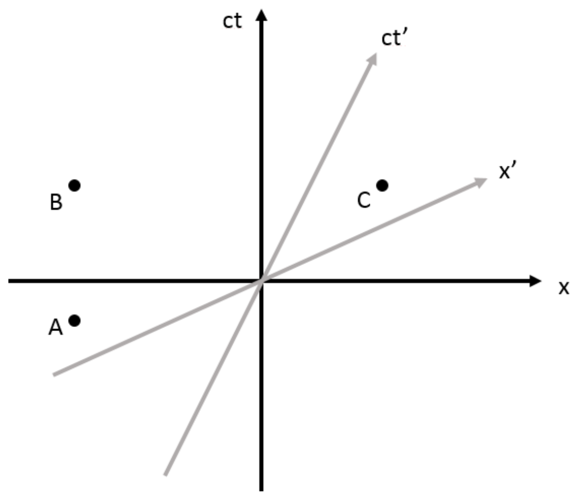


4. Do reaktora w elektrowni atomowej załadowano pręty o masie jednej tony. Po ich zużyciu wydobyte z reaktora ważyły $999,99$kg. Ile energii wyprodukowała reakcja jądrowa w reaktorze?
Wskazówka: A zatem zmiana masy to $0,01kg$. *Energię mierzy się w dżulach,* $1J = 1\frac{kg \cdot m^2}{s^2}$.

5. Jeden gram węgla podczas spalania dostarcza ok. 4J energii. Jak to się ma do energii, która zostałaby uwolniona, gdyby można było uwolnić całą jego energię spoczynkową?

6. W Wielkim Zderzaczu Hadronów (LHC) cząstki są rozpędzane do ogromnych prędkości, a następnie są zderzane. W wyniku zderzenia powstaje wiele nowych cząstek, których łączna masa przekracza masę cząstek zderzanych. Wyjaśnij jak to jest możliwe? Czy nie jest to sprzeczne z zasadą zachowania masy?

7. Na poniższym diagramie czasoprzestrzennym zaznaczono współrzędne w układzie S i S'. Wymień zdarzenia od najwcześniejszego do najpóźniejszego według każdego z układów odniesienia.



Wskazówka: W układzie współrzędnych bez primów, proste równoległe do osi x wyznaczają zdarzenia, które są zdaniem tego obserwatora jednoczesne. W układzie primowanym, są to proste równoległe do osi x'.

8. Rakieta ufoludków o kształcie długiego walca przelatuje nad ziemią w kierunku poziomym. Czy długość walca rakiety obserwowana przez ziemian zależy od jej ułożenia (rakieta niekoniecznie musi być ułożona zgodnie z kierunkiem swojego ruchu)?

2 Zadania trochę mniej łatwe niż łatwe

1. Stacja kosmiczna służąca do zdalnej diagnostyki stanu rakiety kosmicznej ma kształt walca pustego w środku. Rakieta, w celu diagnostyki przelatuje przez środek tego walca. Stacja-walec ma też wrota po obu stronach, z tym że diagnostyka (która trwa zawsze zaniedbywalną ilość czasu) może się odbyć tylko przy zamkniętych obu wrotach (jednocześnie z punktu widzenia stacji). Rakieta, którą chcemy zdiagnozować jest jednak nieco dłuższa od długości stacji-walca. Czy jest możliwa jej diagnoza? Jak ją przeprowadzić? Opisz przebieg takiego procesu według obserwatora na stacji i obserwatora w rakiecie.
Wskazówka: Z punktu widzenia obserwatora na stacji, zanalizuj sytuację pod kątem skrócenia Lorentza. Z punktu widzenia obserwatora w rakiecie zauważ, że to że wrota zamknięte są jednocześnie według obserwatora ze stacji, nie oznacza że są jednocześnie zamknięte z punktu widzenia obserwatora w rakiecie.

2. Znajdź w Internecie grę VelocityRaptor. Przejdź pierwsze 20 lub więcej poziomów. Jakie zjawiska relatywistyczne zaobserwowałaś/eś, gdy prędkość światła była bliska prędkości dinozaura?

3. Ziemianie siedzą w parku delektując się kanapką. Zjedzenie kanapki zajmuje im 5 minut. W tym samym czasie są czujnie obserwowani przez reptylian mijających Ziemię z prędkością 0,99 prędkości światła.

   (a) Oblicz ile czasu według reptylian ziemianie jedzą kanapkę.

   (b) Reptylianie obserwując ziemian też zgłodnieli i też zjedli kanapkę. Zgodnie z ich zegarami zajęło im to 5 minut. Oblicz ile czasu zajmuje reptylianom zjedzenie kanapki według ziemian.

   Wskazówka: Dylatacja czasu.

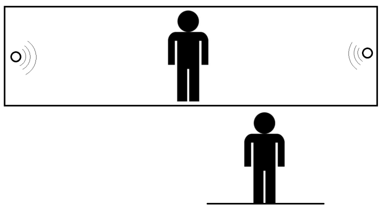
4. Obserwator X stoi po środku rakiety, który porusza się ze stałą prędkością w lewo względem ziemi. Z dwóch końców rakiety zostają wyemitowane dwa sygnały świetlne w tym samym czasie zgodnie z układem obserwatora X.

   (a) Czy według obserwatora Y stojącego na ziemi sygnały zostaną wysłane w tym samym czasie?

   (b) Czy według obserwatora Y sygnały docierają do obserwatora X w tym samym czasie?

   (c) Który sygnał według obserwatora Y został wysłany jako pierwszy?

   Odpowiedzi uzasadnij.



   Wskazówka: Obserwator Y uważa inne rzeczy za równoczesne niż obserwator X. Narysuj tę sytuację na rysunku z czasoprzestrzenią i zaznacz dwa wydarzenia będące wysłaniem sygnałów, które leżą na prostej równoczesnych zdarzeń obserwatora X. Układ obserwatora Y porusza się względem układu X więc jego linia równoczesnych zdarzeń przebiega pod innym kątem. Narysuj również linie światła obu zdarzeń.

5. Mucha porusza się ze stałą prędkością 1m/s po prostej. Wleciała jednym oknem do pokoju o szerokości 10m i wyleciała drugim. Oblicz interwał czasoprzestrzenny pomiędzy tymi zdarzeniami.
   Wskazówka: Zatem czas, który dzieli te zdarzenia to $\frac{10m}{1m/s} = 10s$*, czyli* $ct \simeq 2997924580m$*.*

6. Superman porusza się ze stałą prędkością wynoszącą pół prędkości światła lecąc z Ziemi na Księżyc. Oblicz interwał czasoprzestrzenny pomiędzy startem a lądowaniem (pomiń kwestię przyspieszeń przy starcie i lądowaniu). Załóż, że odległość Ziemi od Księżyca wynosi 384403km.

7. Poziomy metrowy pręt mija Cię poziomo z prędkością równą 60% prędkości światła. Jak długi Ci się wydaje?
Wskazówka: Skrócenie Lorentza.

8. Ufoludek znajduje w się lecącej z północy na południe rakiecie o prędkości równej połowie prędkości światła i przelatuje obok stojącego Zenka. Zenek dostrzega nieruchomy balon, który jego zdaniem znajduje się 1km na zachód, 1km na południe i 1km nad ziemią. Jakie jest położenie balonu zdaniem mijającego Zenka ufoludka?
Wskazówka: Zenek i balon poruszają się względem ufoludka z połową prędkości światła. Dystans pomiędzy nimi w kierunku ruchu skróci się zatem z powodu skrócenia Lorentza.

9. Tak się złożyło, że energia kinetyczna ufoludka jest równa jego energii spoczynkowej. Z jaką prędkością porusza się ufoludek?
Wskazówka: Cała energia ufoludka $E = m\gamma c^2$ to jego energia spoczynkowa $E_0 = mc^2$ plus jego energia kinetyczne E_k. Zatem $E_k = E_0 = E - E_0$.

3 Zadania trudniejsze

1. Lecący rakietą ufoludek zapala światło z przodu i z tyłu rakiety w odstępie $T = 0,0001$s według zegara znajdującego się na rakiecie. Zdaniem ludzi na ziemi, światła zapaliły się jednocześnie. Z jaką prędkością porusza się rakieta, jeśli wiadomo, że ma $L = 100$km długości (zdaniem ufoludka)?
Wskazówka: Załóżmy, że przód rakiety to początek układu współrzędnych ufoludka. Zatem zapalenie światła na przodzie ma współrzędne $x_A = 0, t_A = 0$, a zapalenie światła z tyłu rakiety współrzędne $x_B = L$, $t_B = T$. Oba światła zapaliły się jednocześnie zdaniem obserwatora na ziemi. Zatem można założyć, że $t'_A = t'_B = 0$ (obserwator ma tak ustawiony zegarek, że akurat wskazywał godzinę zero w momencie zapalenia świateł).

2. W sytuacji z zadania 8 z serii zadań „Mniej łatwych niż łatwe”, zdaniem Zenka, balon pęka $0,001$s po minięciu się ufoludka i Zenka. Oblicz interwał czasoprzestrzenny pomiędzy zdarzeniami: pęknięcie balonu i minięcie się Zenka i ufoludka, korzystając z obserwacji:

   (a) Zenka

   (b) ufoludka

   i porównaj wyniki.
   Wskazówka: Z punktu widzenia Zenka, wszystko wiemy i łatwo jest policzyć ten interwał. Aby policzyć interwał z punktu widzenia ufoludka, trzeba policzyć współrzędne czasoprzestrzenne pęknięcia balonu z jego perspektywy. Interwały oczywiście powinny wyjść takie same – ale pewne różnice mogą się pojawić w wyniku różnych zaokrągleń po drodze.

3. Rakieta, którą porusza się Alicja z prędkością 0,9 prędkości światła jest, wyposażona w lampę błyskową. Wysyła ona co sekundę (w czasie własnym) sygnał świetlny. Pierwszy sygnał wysyła w momencie minięcia stojącego obok Boba. Po jakim czasie od pierwszego sygnału według Boba dojdzie do niego sygnał drugi i trzeci?
Wskazówka: Pamiętaj, że w tym zadaniu nie tyle zastanawiamy się nad czasami wysłania sygnałów z punktu widzenia Boba (choć te czasy też trzeba policzyć), co właśnie nad czasami dotarcia sygnałów do Boba.

Literatura dodatkowa

[1] Tony Crilly. *50 teorii matematyki.* PWN, Warszawa, 2009. rozdział 48.

[2] Andrzej Dragan. Niezwykle szczególna teoria względności. http://www.fuw.edu.pl/~dragan/Fizyka/Nstw.pdf.

[3] Richard Feynman. *Sześć trudniejszych kawałków.* Prószyński i S-ka, Warszawa, 1999. rozdziały 7 i 9.

[4] David Filkin. *Wszechświat Stephena Hawkinga.* Rebis, Poznań, 1998. rozdział 4.

[5] John Gribbin and Mary Gribbin. *Czas i przestrzeń.* Arkady, Warszawa, 1995. rozdziały: 15, 16 i 17.

[6] Stephen Hawking. *Krótka historia czasu.* Alfa, Warszawa, 1990. rozdział 2.

[7] Stephen Hawking. *Wszechświat w skorupce orzecha.* Zysk i S-ka, Poznań, 2002. rozdziały: 1 i 2.

[8] Romert Katz. *Wstęp do szczególnej teorii względności.* PWN, Warszawa, 1964.

[9] Jay Orear. *Fizyka, tom 1.* WNT, Warszawa, 1998. rozdziały: 8 i 9.

[10] Roger Penrose. *Makroświat, mikroświat i ludzki umysł.* Prószyński i S-ka, Warszawa, 1997. rozdział 1.

[11] Roger Penrose. *Nowy umysł cesarza.* PWN, Warszawa, 2000. rozdział V.11.

[12] Michał Szurek. *Opowieści geometryczne.* WSiP, Warszawa, 1995. rozdziały: 6 i 29.