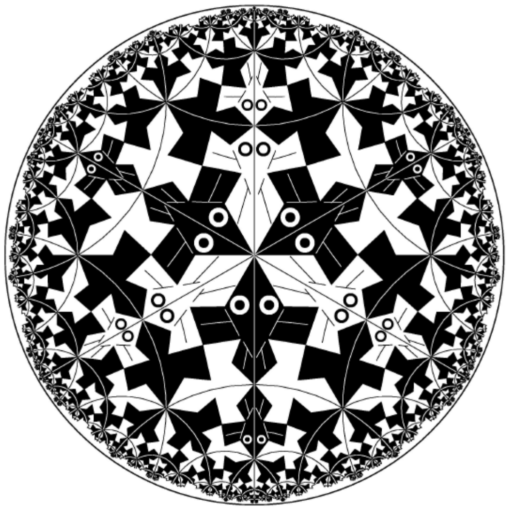
Geometrie Wszechświata.
2. Problem z Euklidesem
materiały do ćwiczeń

Projekt „Matematyka dla ciekawych świata”
spisał: Michał Korch

9 marzec 2017

Różne geometrie i modele w pigułce

1. Geometria euklidesowa:
    - przez punkt poza daną prostą można poprowadzić dokładnie jedną prostą równoległą do niej,
    - suma kątów w każdym trójkącie wynosi 180°.
2. Geometria hiperboliczna:
    - przez punkt poza daną prostą można poprowadzić wiele prostych równoległych do niej,
    - suma kątów w każdym trójkącie jest mniejsza niż 180° i im trójkąt jest większy tym bardziej.
    - modele (należy o nich myśleć, jak o mapach kuli ziemskiej – każda mapa idzie na kompromis i pewne cechy, np. kąty odwzorowuje dobrze, a inne, np. pola źle):
        – Model Poincarégo
            * cała płaszczyzna mieści się w kole bez brzegu,
            * proste to średnice (bez końców) oraz łuki okręgów obustronnie prostopadłych do brzegu (mówimy, że okręgi są prostopadłe, jeśli prostopadłe są proste styczne do nich w tym punkcie)
            * model ten zachowuje kąty, ale oczywiście nie zachowuje odległości i pól (rzeczy się „zagęszczają” im bliżej są brzegu), co dobrze odwzorowuje rysunek Eschera (wszystkie kształty na tym rysunku takie same i takiej samej wielkości (przystające) w tej geometrii)



- Model Kleina
  - cała płaszczyzna, jak wyżej, mieści się w kole bez brzegu,
  - proste to cięciwy tego koła (bez końców),
  - relatywnie łatwo policzyć odległość pomiędzy punktami w tym modelu, używając standardowej linijki. Jeśli chcemy policzyć odległość między punktami A i B prowadzimy prostą (cięciwę) je łączącą. Punkty przecięcia tej cięciwy z okręgiem będącym brzegiem modelu niech będą P i Q, a kolejność punktów na cięciwie to P, A, B, Q. Mierzymy euklidesowe odległości PA, BQ, PB, AQ. Wtedy odległość między A i B w sensie geometrii hiperbolicznej, to:

    $$\ln \frac{|PB||AQ|}{|PA||BQ|},$$

    gdzie ln to pewna funkcja matematyczna (nosząca nazwę logarytmu naturalnego) – znajdziesz ją na każdym standardowym kalkulatorze,
  - ten model nie zachowuje kątów, ani pól.

3. Geometria sferyczna

   - proste (najkrótsze drogi między punktami) na sferze to wielkie okręgi, czyli okręgi o środku w środku sfery, np. równik i południki, ale już nie równoleżniki,
   - każde dwie proste się przecinają, czyli nie ma prostych równoległych,
   - suma kątów w każdym trójkącie jest większa niż $180°$,
   - są takie pary punktów (przeciwległe, zwane też antypodycznymi), przez które można poprowadzić wiele prostych.

4. Geometria eliptyczna (płaszczyzna rzutowa) – model na połówce sfery.

   - Patrzymy na geometrię sferyczną na połówce sfery, z tym że „sklejamy” przeciwległe punkty brzegu tej półsfery. W takim znaczeniu, że jeśli ktoś wyjdzie z jednej strony teleportuje się natychmiast i bez zauważenia tego faktu do przeciwległego punktu.
   - Przez każde dwa punkty w takim razie można poprowadzić dokładnie jedną prostą,
   - Nadal nie ma prostych równoległych, a suma kątów w każdym trójkącie jest większa niż $180°$.

1 Zadania łatwe

1. Na płaszczyźnie euklidesowej narysowano trójkąt. Rozstrzygnij, jaki ma on kształt, jeśli:
   (a) jeden z jego kątów jest równy sumie dwóch pozostałych?
   (b) jeden z jego kątów jest mniejszy niż suma dwóch pozostałych?
   (c) jeden z jego kątów jest większy niż suma dwóch pozostałych?

   Wskazówka: Suma kątów w trójkącie w geometrii euklidesowej wynosi $180°$.

2. Co można powiedzieć o sumie kątów w dowolnym czworokącie (a co o sumie kątów w dowolnym pięciokącie? sześciokącie?) narysowanym w:
   (a) geometrii euklidesowej?
   (b) geometrii hiperbolicznej? geometrii eliptycznej?

   Odpowiedzi uzasadnij!
   Wskazówka: Użyj trójkątów.

3. Mając dwie proste, które się przecinają, w geometrii euklidesowej dowolna inna prosta przecina jedną z nich. Sprawdź czy jest to również prawda w geometrii hiperbolicznej, korzystając z wybranego modelu.

4. Mając dane dwa punkty na brzegu koła modelu Poincarégo skonstruuj (przy pomocy cyrkla i linijki) prostą w sensie geometrii hiperbolicznej o końcach w tych dwóch punktach.
   Wskazówka: Jeśli te dwa punkty leżą na przeciw siebie, to ta prosta to średnica okręgu je łącząca. A jeśli nie to ta prosta jest łukiem prostopadłym do okręgu będącego brzegiem modelu, a zatem ten łuk jest styczny do promieni tego okręgu.

5. Narysuj dwa trójkąty: mniejszy i większy
   (a) w modelu Poincarégo geometrii hiperbolicznej,
   (b) na sferze,

   oraz używając kątomierza sprawdź ich sumy kątów. Jaką prawidłowość zaobserwowałaś/eś?
   Wskazówka: Pamiętaj, że kąt pomiędzy dwoma okręgami to kąt pomiędzy stycznymi do tych okręgów w tym punkcie. O tym, jak rysować proste w modelu Poincarégo jest poprzednie zadanie. Do rysowania prostych na sferze możesz użyć sznurka.

6. Na płaszczyźnie rzutowej poprowadzono prostą. Na ile części rozcina ona całą płaszczyznę?
   Wskazówka: Pamiętaj o sklejeniu „przeciwległych” punktów na brzegu półsfery.

7. W geometrii euklidesowej na każdym trójkącie można opisać okrąg (czyli istnieje okrąg przechodzący przez wszystkie trzy wierzchołki trójkąta). Mając dany trójkąt ABC, opisz na nim okrąg przy pomocy cyrkla i linijki.
   Wskazówka: Środek tego okręgu jest równoodległy od A i B oraz równoodległy od B i C. Wyznacz proste prostopadłe odpowiednio do AB i BC oraz dzielące te odcinki na dwie równe części. Gdzie leży środek szukanego okręgu? Dlaczego?

8. Na poniższej mapie (odwzorowanie Merkatora) zaznacz najkrótszą trasę pomiędzy Warszawą i Tokio oraz pomiędzy Warszawą a Buenos Aires. Do jej znalezienia możesz użyć globusu i nitki, albo skorzystać z darmowego programu Google Earth (w którym można zobaczyć kulę ziemską oraz wyznaczać proste). Znajdź kąty pomiędzy znalezioną trasą a kierunkiem północnym wyznaczanym przez kolejne zaznaczone na mapie południki. Co zaobserwowałaś/eś?

9. Na sferze narysuj:

   (a) trójkąt, który ma wszystkie trzy kąty proste,

   (b) okrąg wokół danego punktu.

10. Rozstrzygnij, czy na sferze istnieje okrąg o średnicy większej niż średnica sfery.

11. Rozstrzygnij, czy na sferze można narysować prostokąt (czworokąt o 4 kątach prostych). A czy istnieje jakikolwiek prostokąt w geometrii hiperbolicznej? Odpowiedzi uzasadnij.

2 Zadania trochę mniej łatwe niż łatwe

1. Udowodnij, że w trójkącie na płaszczyźnie euklidesowej kąt pomiędzy dwusieczną (prostą dzielącą kąt na dwie równe części) a wysokością wychodzącymi z jednego wierzchołka jest

równy połowie różnicy kątów w wierzchołkach przy przeciwległej podstawie trójkąta.
Wskazówka: Skorzystaj dwa razy z faktu, że suma kątów w trójkącie w geometrii euklidesowej wynosi $180°$.

2. W geometrii sferycznej poprowadzono trzy proste, które nie przecinają się w jednym punkcie. Na ile i jakich kształtów dzielą one całą sferę?

3. Na płaszczyźnie rzutowej poprowadzono trzy proste przecinające się w jednym punkcie. Na ile i jakich kształtów te proste dzielą płaszczyznę rzutową?

4. Na płaszczyźnie rzutowej poprowadzono trzy proste, które nie przecinają się w jednym punkcie. Na ile i jakich kształtów te proste dzielą płaszczyznę rzutową?
Wskazówka: Pokoloruj odpowiednie fragmenty półsfery, pamiętając o „sklejeniu" punktów przeciwległych na brzegu.

5. Rozważmy model Kleina geometrii hiperbolicznej. Narysuj dowolną cięciwę i zaznacz jej połowę A oraz jedną czwartą B w sensie odległości euklidesowych oraz jedną ósmą C. Jakie są wzajemne odległości punktów A, B i C w sensie geometrii hiperbolicznej? Skorzystaj z kalkulatora, żeby dostać wartości ln.

3 Zadania trudniejsze

1. W modelu Poincarégo (jest dany środek koła O oraz sam okrąg o) zaznaczono dwa punkty A i B. Skonstruuj (korzystając z cyrkla i linijki) prostą (w sensie geometrii hiperbolicznej) przechodzącą przez te dwa punkty.
Wskazówka: Zajmijmy się trudniejszym przypadkiem, gdy prosta AB *nie jest średnicą. Zadanie sprowadza się do konstrukcji okręgu* o'*, który przechodzi przez punkty* A *i* B *oraz jest prostopadły do okręgu* o*. Najpierw skonstruujemy punkt* C *będący drugim przecięciem prostej* OA *z szukanym okręgiem. Ponieważ okręgi mają być prostopadłe, to promienie okręgu* o *w punktach przecięcia okręgów są styczne do okręgu* o'*. Zatem jeśli* r *jest promieniem okręgu* o*, to* $r^2 = |OA||OC|$*. Dlaczego tak jest? Wykorzystaj zadanie 3 z listy łatwej z zadań z poprzednich ćwiczeń, żeby skonstruować długość* $|OC|$*. Znajdź punkt* C*, a następnie zastosuj zadanie 7 z listy łatwych zadań.*

2. Z płaszczyzny rzutowej wycięto koło. Co można powiedzieć o pozostałym fragmencie? Czy da się go sensownie narysować (tak, żeby nie trzeba było pamiętać, że coś z czymś jest sklejone)?
Wskazówka: Ustaw tak to koło, które wycinamy, aby przechodziło przez brzeg półsfery.

Literatura dodatkowa

[1] Wiktor Bartol and Witold Sadowski, editors. *O twierdzeniach i hipotezach. Matematyka według Delty.* Wydawnictwa UW, Warszawa, 2016. rozdział 9.

[2] Krzysztof Ciesielski and Zdzisław Pogoda. *Bezmiar matematycznej wyobraźni.* Wiedza Powszechna, Warszawa, 1995. rozdział 8.

[3] Richard Courant, Herbert Robbins, and Ian Stewart. *Co to jest matematyka?* Prószyński i S-ka, Warszawa, 1998. rozdział IV.9.

[4] Tony Crilly. *50 teorii matematyki.* PWN, Warszawa, 2009. rozdział: 27.

[5] Philip Davis, Reuben Hersh, and Elena Marchisotto. *Świat matematyki.* PWN, Warszawa, 2001. rozdział V.3.

[6] Richard Feynman. *Sześć trudniejszych kawałków.* Prószyński i S-ka, Warszawa, 1999. rozdział 10.

[7] Marek Kordos. *Wykłady z historii matematyki.* Script, Warszawa, 2005. rozdziały: 3, 7, 8 i 19.

[8] Roger Penrose. *Makroświat, mikroświat i ludzki umysł.* Prószyński i S-ka, Warszawa, 1997. rozdział 1.

[9] Roger Penrose. *Nowy umysł cesarza.* PWN, Warszawa, 2000. rozdział V.2.

[10] Michał Szurek. *Opowieści geometryczne.* WSiP, Warszawa, 1995. rozdział: 1.