

Geometrie Wszechświata.

1. Elementy materiały do ćwiczeń

Projekt „Matematyka dla ciekawych świata”
spisał: Michał Korch

2 marzec 2017

1 Zadania łatwe

- Masz dany odcinek. Korzystając tylko z cyrkla i linijki:
 - znajdź środek odcinka,
 - skonstruuj (narysuj) kwadrat, którego dany odcinek jest bokiem.
- Masz dane dwa kwadraty. Skonstruuj kwadrat o polu będącym sumą pól zadanych kwadratów.
Wskazówka: Skorzystaj z tw. Pitagorasa.
- Niech będzie dany trójkąt prostokątny ABC o przeciwprostokątnej AB . Wysokość z wierzchołka C pada na podstawę AB w punkcie H . Udowodnij, że $|CH| = \sqrt{|AH||BH|}$.
Wskazówka: Skorzystaj trzy razy z tw. Pitagorasa.
- Skonstruuj sito Erastotenesa: wypisz na kartce liczby od 1 do 100 (na przykład w kwadracie 10 na 10). Wykreśl liczbę 1. Następnie postępuj iteracyjnie następująco, dopóki wszystkie liczby nie są wykreślone lub zakreślone w kółko:
 - zakreśl w kółko pierwszą nieskreśloną liczbę,
 - wykreśl wszystkie kolejne liczby przez nią podzielne.Jakie liczby zostały zakreślone w kółko? Dlaczego?
- Stwórz samodzielnie siatki czworoscianu foremego, sześcianu oraz ośmiościanu foremnego.
- Niech będzie dany trójkąt prostokątny ABC , taki że AB jest jego przeciwprostokątną. Niech O będzie środkiem kwadratu o boku AB zbudowanego na zewnątrz trójkąta ABC . Udowodnij, że odcinek OC dzieli kąt ACB na dwie równe części.
Wskazówka: Na czworokącie $AOBC$ da się opisać okrąg. Dlaczego? Następnie skorzystaj z tego, że kąty wpisane w okrąg oparte na równych łukach są równe.

7. Niech będą dane dwa okręgi przecinające się w punktach P i Q oraz punkt A leżący na pierwszym okręgu, różny od P i Q . Punkty przecięcia przedłużeń odcinków AP i AQ z drugim z okręgów, to odpowiednio B i C . Udowodnij, że styczna do pierwszego z okręgów w punkcie A jest równoległa do prostej BC .

Wskazówka: Skorzystaj z twierdzenia o kącie dopisanym w okręgu, a następnie zauważ, że czworokąt $BCQP$ jest wpisany w okrąg.

2 Zadania trochę mniej łatwe niż łatwe

- Niech będzie dany prostokąt. Skonstruuj kwadrat o polu równym polu tego prostokąta.
Wskazówka: Skorzystaj z zadania 3 z listy „Łatwych”.
- Dany jest trójkąt ostrokątny ABC , taki że kąt przy wierzchołku C wynosi 60° . Punkty D i E są rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów A i B na proste BC i AC . Punkt M jest środkiem boku AB . Wykaż, że trójkąt DEM jest równoboczny.
Wskazówka: Oblicz kąt CAD lub CBE , a następnie przyjrzyj się czworokątowi $ABED$. Czy można na nim opisać okrąg?
- Jak wiesz umiemy skonstruować pięciokąt foremny. Załóżmy więc, że mamy dany pięciokąt foremny. Jak skonstruować piętnastokąt foremny?
Wskazówka: $1/3 - 1/5 = ?$
- Stwórz samodzielnie siatki dwunastościanu foremnego oraz dwudziestościanu foremnego.
- Jak wiesz, twierdzenie o potędze punktu, które dowiódł Euklides w 3. księdze „Elementów” mówi, że jeśli dany jest okrąg o oraz proste k i l przecinające się w punkcie P na zewnątrz okręgu o , takie że A i B to punkty przecięcia k i okręgu o , zaś l jest styczna do o w punkcie C , to:

$$|PC|^2 = |PA| \cdot |PB|.$$

Udowodnij to twierdzenie w przypadku, gdy prosta k przechodzi przez punkt O będący środkiem okręgu o .

Wskazówka: Załóżmy bez straty ogólności, że punkt A leży bliżej punktu P niż punkt B . Połącz odcinkiem O i C . Zauważ, że $|OP|^2 = (|PA| + |OA|)^2 = |OA|^2 + |PA|(2|OA| + |PA|)$. Teraz zauważ równość różnych promieni okręgu o oraz skorzystaj z Tw. Pitagorasa.

- Przeprowadź krok po kroku, cyrklem i linijką, konstrukcję Euklidesa pięciokąta foremnego, którą zobaczyłaś/eś podczas wykładu.
- Dowód Euklidesa, o tym, że jest nieskończenie wiele liczb pierwszych sugeruje przyjrzenie się liczbom będącym iloczynem początkowych n liczb pierwszych zwiększonym o jeden. Np. $2 \cdot 3 + 1 = 5$ (iloczyn dwóch początkowych liczb pierwszych zwiększony o jeden) jest liczbą pierwszą. Czy zawsze tak skonstruowana liczba (iloczyn trzech, czterech, itd. początkowych liczb pierwszych zwiększony o 1) jest pierwsza? Odpowiedź uzasadnij.
- Zmodyfikujmy konstrukcję z poprzedniego zadania definiując tzw. liczby Euklidesa. Pierwsza liczba Euklidesa to 2 ($e_1 = 2$). Kolejna liczba Euklidesa to iloczyn poprzednich liczb Euklidesa zwiększony o 1 (czyli $e_2 = e_1 + 1 = 2 + 1 = 3$, $e_3 = e_1 \cdot e_2 + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$, itd.). Czy każda liczba Euklidesa jest liczbą pierwszą? Odpowiedź uzasadnij.

9. Na bokach BC i AC trójkąta ostrokatnego ABC zbudowano, po zewnętrznej stronie, kwadraty, odpowiednio, $BCFE$ i $ACGH$. Udowodnij, że proste AF , BG i EH przecinają się w jednym punkcie.

Wskazówka: Zauważ, że patrząc z punktu C , AF i BG są odcinkami obróconymi względem siebie o 90° . Niech M będzie punktem ich przecięcia. Policz miary poszczególnych kątów składających się na kąt HME .

3 Zadania trudniejsze

1. Niech prosta k przechodzi przez środek O okręgu o oraz niech C i D leżą na tym okręgu po jednej stronie prostej k . Poprowadźmy jeszcze proste styczne m i n do o odpowiednio w punktach C i D . Niech przecięcie k i m to A oraz przecięcie k i n to B , zaś przecięcie m i n to P . W końcu, niech H będzie spodkiem wysokości z wierzchołka P na podstawę AB w trójkącie ABP . Udowodnij, że kąty CHP i DHP są sobie równe.

Wskazówka: Punkty C, P, D, H i O leżą na jednym okręgu. Dlaczego?

2. Udowodnij twierdzenie o potędze punktu w ogólnym przypadku (patrz zadanie 5 z „trochę mniej łatwe niż łatwe”), czyli gdy prosta k nie przechodzi przez środek okręgu.

Wskazówka: Zaznacz punkt D będący środkiem odcinka AB oraz poprowadź odcinki OD , OP , OA i OC . Postępuj podobnie jak w zadaniu 5 z „trochę mniej łatwe niż łatwe”, z tym że tym razem będziesz korzystać z Tw. Pitagorasa aż trzy razy!

3. W dziele „O podziałach figur”, przypisywanym również Euklidesowi, formułuje on następujące zadanie. Niech będzie dany trójkąt ABC oraz punkt D leżący na boku AB . Poprowadź przez punkt D prostą tak, aby podzieliła trójkąt na dwie części o równych polach.

Wskazówka: Rozważ najpierw prostą sytuację, gdy D jest środkiem odcinka AB . Jeśli nie jest, to założymy, że D jest bliżej A , niż B . Zaznacz punkt E będący środkiem odcinka AB oraz narysuj prostą przechodzącą przez E i równoległą do DC .

Zadania inspirowane: listami zadań Kuby Pawlikowskiego z zadań obozu Almu, zadaniami z książki „Matematyka konkretna”, R. Graham, D. Knuth, O. Patashnik, pomysłami Michała Korcha, listami zadań dr. J. Bednarczuka do Geometrii I i II, „O podziałach figur” przypisywane Euklidesowi.

Literatura dodatkowa

- [1] Krzysztof Ciesielski and Zdzisław Pogoda. *Bezmiar matematycznej wyobraźni*. Wiedza Powszechna, Warszawa, 1995. rozdziały: 5 i 8.
- [2] Tony Crilly. *50 teorii matematyki*. PWN, Warszawa, 2009. rozdziały: 23 i 27.
- [3] Szczepan Jeleński. *Śladami Pitagorasa*. WSiP, Warszawa, 1995. rozdział: I.7.
- [4] Marek Kordos. *Wykłady z historii matematyki*. Script, Warszawa, 2005. rozdziały: 3, 7, 8 i 19.
- [5] Michał Szurek. *Opowieści geometryczne*. WSiP, Warszawa, 1995. rozdziały: 1 i 3.