Podzielność, liczby pierwsze i te drugie

Zadania -palcówki

1. Na wyspach Bergamutach mieszkańcy używają liczb naturalnych które postaci 3k+1. Ile jest Bergamuckich liczb pierwszych mniejszych od 30? (liczba pierwsza to taka, która ma tylko dwa dodatnie dzielniki, oczywiście w zbiorze liczb "Bergamuckich")
2. Pokazać, że liczby 5050505 nie można przedstawić w postaci sumy dwóch liczb pierwszych.
3. Znaleźć wszystkie pary liczb całkowitych dodatnich, takie że
   - $x + y = 150$, $NWD(x, y) = 30$
   - $xy = 8400$, $NWd(x, y) = 20$
   - $NWD(x, y) = 45$, $7x = 11y$
4. Znaleźć wszystkie liczby naturalne n takie, że n, $n + 10$, $n + 14$ są pierwsze.
5. Dane są liczby całkowite $a, b, c > 1$ takie, że największy wspólny dzielnik liczb $a-1, b-1, c-1$ jest większy od 1. Udowodnij, że liczba $abc - 1$ jest złożona.
6. Jakie reszty może dawać kwadrat liczby całkowitej przy dzieleniu przez 3?, 4? 8? 5?
7. Uzasadnij, że zawsze wśród 11 liczb całkowitych można znaleźć dwie, których różnica dzieli się się przez 10.
8. Jakie reszty może dawać sześcian liczby całkowitej przy dzieleniu przez 7? 9?
9. Udowodnić, że liczba o sumie cyfr 47 nie może być ani kwadratem ani sześcianem liczby całkowitej.
10. Sprawdzić jakie reszty z dzielenia przez 7 dają sześciany liczb całkowitych, a następnie udowodnić, że dla dowolnych liczb całkowitych a, b, c ioczyn $abc(a^3 - b^3)(b^3 - c^3)(c^3 - a^3)$ jest podzielny przez 7.
11. Jakie wspólne dzielniki mogą mieć liczby n oraz $n + 6$?

Zadania ćwiczeniowe

1. W pewnym roku liczba poniedziałków jest równa liczbie śród =a. Czy oznacza to, że w tym roku liczba wtorków musi być równa a?
2. Korzystając z własności kongruencji sformułowac i udowodnić cechy podzielności przez 3, 9, 11,7.
3. W liczbie 2010! policzono sumę cyfr, potem sumę cyfr otrzymanej liczby itd, aż otrzymano liczbę jednocyfrową. Jaka to liczba?
4. Pokazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n, liczba $n^{33} + 8$ jest liczbą złożoną.
5. Korzystając z algorytmu Euklidesa rozwiązać kongruencję $17x \equiv_{26} \quad 1$
6. Znaleźć $NWD(2^{63} - 1, 2^{91} - 1)$
7. Udowodnić, że jeśli p, q są kolejnymi nieparzystymi liczbami pierwszymi to w rozkładzie $p + q$ na iloczyn liczb pierwszych występują conajmniej trzy liczby pierwsze (niekoniecznie różne).
8. Znaleźć liczbę pierwszą p, jeśli wiadomo, że $4p^2 + 1$ i $6p^2 + 1$ są liczbami pierwszymi.
9. Niech a i b będą liczbami naturalnymi. Udowodnić, że jeżeli $40a = 51b$, to liczba $a + b$ jest liczbą złożoną.
10. Udowodnij, ze różnica kwadratów dowolnych dwóch liczb nieparzystych jest zawsze podzielna przez 8.
11. Wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba, $\frac{(3n+1)(n^3-3n^2+2n)}{12}$ jest liczbą naturalną.

12. Udowodnij, że w ciagu 11, 111, 1111, 11111, ... nie ma kwadratów liczb naturalnych.

13. Liczby pierwsze p, q, r, s spełniają warunki $p > q > r > s$ oraz $p - q = q - r = r - s$. Udowodnij, że liczba $p - s$ jest podzielna przez 18.

14. Wyznacz wszystkie trójki liczb całkowitych (x, y, z) takie, że $xy^2z(x + 5y) = 111^{15}$.

Zadania koncertowe

1. Udowodnić, że jest nieskończenie wiele liczb pierwszych postaci 4k-1.

2. Pokazać, że dla każdej liczby naturalnej $n > 1$ liczba $n^4 + 4^n$ jest złożona.

3. Czarnoksieżnik więzi w zamku 100 księżniczek: każda w osobnej zamknietej komnacie o numerze od 1 do 100. Czarnoksieznik zatrudnia 100 strazników. Każdej nocy strażnicy sprawdzaja wszystkie komnaty. Każdy z nich na klucze. Klucz i-tego straznika otwiera wszystkie zamknięte i zamyka otwarte komnaty o numerach podzielnych przez i. Każdy ze strażników robi nocny obchód dokładnie raz. Rano ksiezniczki w otwartych pokojach moga wyjść na wolność. Ilu ksieżniczkom uda sie wyjsc na wolnosc? Z których komnat?

4. Smok ma 1000 głów. Rycerz może jednym cięciem obciac 21 lub 33 lub 14 lub 1 głowe. Smokowi odrasta natychmiast odpowiednio 51, 0 , 11 lub 103 głowy. Smok zostaje zabity gdy wszystkie głowy zostaja ściete. Czy rycerz moze zabic smoka?

5. Dany jest zbiór 17 liczb całkowitych dodatnich, z których żadna nie ma dzielnika pierwszego wiekszego od 7. Pokazać, że istnieją w tym zbiorze dwie liczby których iloczyn jest kwadratem liczby całkowitej.

6. Trzech rozbitków dopłynęło do bezludnej wyspy na której znaleźli palme kokosową i zebrali z niej orzechy. Postanowili rano podzielić orzechy na trzy części.W nocy obudził się jeden z nich, podzielił orzechy na trzy części. Ponieważ został mu jeden orzech to oddał go małpie która była w pobliżu. Swoją część zakopał, pozostałe orzechy zostawił w jednym miejscu i poszedł spać. Potem obudził się drugi rozbitek. Również dał małpie jeden orzech i resztę podzielił na trzy równe części. Swoją część zakopał w piasku, a pozostałe części ułożył razem w jednym miejscu i poszedł spać. Nad ranem obudził się trzeci rozbitek i postąpił jak koledzy. Jeden orzech dał małpie, pozostałe podzielił na trzy równe części – jedną zakopał w piasku, a dwie ułożył razem w jednym miejscu i poszedł spać. Rano żaden z rozbitków nie śmiał zrobić uwagi, że orzechów jest o wiele mniej, niż poprzedniego dnia. Oczywiście małpa zjawiła się natychmiast, dostała orzech, a pozostałe kokosy rozbitkowie podzielili na trzy równe części. Oblicz, jaka mogła być najmniejsza liczba orzechów kokosowych na początku. Znajdź jeszcze inne liczby kokosów, aby możliwy był powyższy podział.

7. Pokazać, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje ciąg n kolejnych liczb naturalnych, z których każda jest złożona.

8. Pokazać, że istnieje ciąg 1000 kolejnych liczb zawierający dokładnie 5 liczb pierwszych.