Ćwiczenia: liczby wymierne i rzeczywiste

Projekt „Matematyka dla ciekawych świata”
spisał: Michał Korch

10 marca 2016

1. (2p) W okręgu wyborczym oddano 31200 głosów. Do przydzielenia jest 5 mandatów w sejmie. Mandaty rozdzielono metodą d'Hondta (metoda z dzieleniem liczby głosów przez kolejne liczby naturalne). W wyborach startowały 4 partie: Alchemików, Botaników, Cyników i Domokrążców.

   - partie osiągnęły następujące liczby głosów: A: 12000, B: 8000, C: 7000, D: 4200. Ile mandatów zdobyły poszczególne komitety w tym okręgu? Jakie wady związane z naruszeniem proporcjonalności dostrzegasz w tym wyniku?
   - a jakie wyniki byłyby, gdyby 700 wyborców partii Botaników zagłosowało jednak na Alchemików. Kto straci, a kto zyska mandat?

2. (2p) Porównaj metody d'Honta (metoda z dzieleniem liczby głosów przez kolejne liczby naturalne) oraz rozszerzoną metodę Sainte-Laguë (metoda z dzieleniem przez $1,4$ oraz $3, 5, 7, \ldots$) na następującym przykładzie. W okręgu oddano 45000 głosów i było do zdobycia 9 mandatów. Startowało 7 partii i osiągnęły one następujące wyniki:

Ekranizatorzy	12000
Fundriserzy	11500
Gawędziarze	7500
Histerycy	6000
Ideowcy	4000
Jałmużnicy	2200
Kabareciarze	1800

   Ile mandatów zdobyłyby poszczególne komitety, jeśli mandaty przydzielane byłyby pierwszą metodą? Ile jeśli drugą? Jakie są różnice i jakie widzisz niedoskonałości w tych metodach? Która jest lepsza dla dużych partii?
   Wskazówka: Użyj kalkulatora. :P

3. (1p) W wyborach w 1991 roku zastosowano jeszcze inną metodę – metodę największych reszt. Polega ona na tym, że najpierw liczymy liczbę $P = \frac{\text{liczba oddanych głosów}}{\text{liczba mandatów do zdobycia}}$. Następnie każdy komitet dostaje tak zwane „całościowe mandaty” w liczbie: $\lfloor \frac{\text{liczba głosów na dany komitet}}{P} \rfloor$. Pozostałe dostępne mandaty są przydzielane komitetom w kolejności reszt z tego dzielenia (liczby oddanych głosów przez P) – od największej do najmniejszej. Ile mandatów zdobyłyby poszczególne komitety w sytuacji z poprzedniego zadania, gdyby mandaty przydzielano tą metodą?

4. (2p) Sprawdź które z następujących relacji są zwrotne? Które są symetryczne, a które przechodnie? Które zatem są relacjami równoważności?

   - dwoje ludzie jest ze sobą w relacji „starszy”, jeśli wiek pierwszej osoby w parze jest większy lub równy wiekowi drugiej osoby.
   - dwie liczby całkowite są w relacji „modulo 7”, jeśli dają tą samą resztę z dzielenia przez 7.

- dwa dźwięki są w relacji „oktawa”, jeśli różnią się o pewną wielokrotność oktawy.
- dwa państwa są w relacji „wspólna organizacja”, jeśli oba należą do jakiejś organizacji. międzynarodowej.
- dwie książki są w relacji „tak samo gruba”, jeśli mają tyle samo stron.
- dwa domy są w relacji „mniej więcej tam samo”, jeśli mają ten sam kod pocztowy.
- dwie liczby wymierne są w relacji „odwrotne”, jeśli ich iloczyn wynosi 1.
- dwie proste na płaszczyźnie są w relacji „równoległe”, jeśli są równoległe (lub się pokrywają).
- dwie liczby wymierne są w relacji „blisko”, jeśli różnią się (moduł ich różnicy) o co najwyżej $\frac{1}{2}$.
- dwie liczby rzeczywiste są w relacji „taki sam znak”, jeśli obie są < 0 lub obie są ≥ 0.

5. (2p) W poprzednim zadaniu w przypadku relacji równoważności opisz klasy abstrakcji. Czy da się powiedzieć ile jest klas abstrakcji w poszczególnych wypadkach?

6. (2p) Czy może istnieć relacja równoważności pomiędzy liczbami naturalnymi, która daje skończenie wiele klas abstrakcji o skończonej liczbie elementów każda?

7. (1p) Podaj przykład relacji równoważności pomiędzy liczbami naturalnymi, która ma dokładnie dwie klasy abstrakcji, obie nieskończone.

8. (3p) Czy wszystkie liczby wymierne da się ustawić w pary z tymi liczbami wymiernymi, które są większe od zera i mniejsze od 1 tak, aby jeśli (p, q) i (r, s) są dwoma parami w tym ustawieniu, to $p \leq r$ wtedy i tylko wtedy, gdy $q \leq s$ (czyli, mówiąc nieformalnie, nasze ustawienie w pary zachowuje porządek).
   Wskazówka: Rozważ przyporządkowanie liczbie q liczby $\frac{1+q+|q|}{2(1+|q|)}$.

9. (1p) Udowodnij, że następujące liczby nie są wymierne:
   - $\sqrt{3}$,
     Wskazówka: Załóż, że taką liczbę da się zapisać w postaci ułamka i że jest on skrócony (licznik nie dzieli się przez żaden dzielnik mianownika).
   - $\sqrt[3]{2}$,
   - $\sqrt{6}$,
   - $\sqrt[3]{3}$.

10. (3p) Udowodnij, że następujące liczby nie są wymierne:
   - $\sqrt{3} + \sqrt{2}$,
     Wskazówka: Załóż przeciwnie, że ta liczba jest równa pewnej liczbie wymiernej. Przenieś jeden z pierwiastków na drugą stronę równania i podnieś stronami do kwadratu.
   - $\sqrt{2} + \sqrt{2}$.

11. (3p) Udowodnij, że $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ nie jest liczbą wymierną.

12. (2p) Mając dany odcinek długości $1cm$, skonstruuj przy pomocy cyrkla i linijki (bez podziałki) odcinki o długości:
   - $\sqrt{3}$cm,
     Wskazówka: Skorzystaj z Tw. Pitagorasa
   - $\sqrt{5}$cm.

13. (4p) O liczbie x wiadomo, że jest dodatnia i że spełnia równanie $x^5 + x = 10$. Udowodnij, że jest ona niewymierna.
Wskazówka: Na podstawie równania można stwierdzić, że $1,5 < x < 1,6$. *Załóż przeciwnie, że da się zapisać* x *jako skrócony ułamek* $\frac{p}{q}$ *i wywnioskuj, że* p *jest dzielnikiem liczby* 10. *Zauważ, że żaden taki ułamek nie wpada w wyznaczony przedział.*

14. (1p) Sprawdź, które z następujących ciągów są rosnące? Które są ograniczone z góry?
   - $1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, \ldots,$
   - $0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, 2 \ldots$ $(a_n = n - 3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor)$,
   - $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$ $(a_n = \frac{n}{n+1})$,
   - $-1, -2, -4, -8, \ldots$ $(a_n = -2^n)$,
   - $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots$ $(a_n = \frac{(-1)^n}{n+1})$,
   - $2, 0, \frac{2}{3}, 0, \frac{2}{5}, 0, \frac{2}{7}, \ldots$ $(a_n = \frac{1+(-1)^n}{n+1})$.

15. (2p) Dla ciągów z poprzedniego zadania, spradź, które są ciągami Cauchy'ego i wyznacz ich granicę.

16. (3p) Wyznacz granicę ciągów:
   - $a_n = \frac{2n}{3n+1}$,
     Wskazówka: Wyciągnij n *przed nawias w liczniku i mianowniku.*
   - $a_n = \frac{4n^2+3n}{2n^2+4}$,
     Wskazówka: Wyciągnij n^2 *przed nawias w liczniku i mianowniku.*
   - $a_n = \frac{n^2+4}{3n^3+1}$.

17. (3p) Wiedząc, że pole powierzchni sfery dane jest wzorem $4\pi r^2$ oraz, że objętość dowolnego ostrosłupa to $\frac{1}{3}$ pola jego podstawy przemnożone przez wysokość, przeprowadź dowód tego, że objętość kuli dana jest wzorem $\frac{4}{3}\pi r^3$.
Wskazówka: Wyobraź sobie figury wpisane w tą sferę, których ściany boczne to coraz większa liczba trójkątów.

18. (1p) Wiedząc, że π oraz e są liczbami niewymiernymi udowodnij, że niewymierne są też:
   - 2π,
   - $\frac{1}{e}$,
   - $\sqrt[3]{\pi}$.

19. (2p) Wiedząc, że π oraz e są liczbami przestępnymi, udowodnij, że następujące liczby są niewymierne:
   - π^2,
   - $\sqrt{e^3}$.

20. (3p) Wiedząc, że $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e$, znajdź granicę ciągu $(1 - \frac{1}{n})^n$. $(n > 0)$.
Wskazówka: $(1 - \frac{1}{n}) = \frac{n-1}{n} = \frac{1}{\frac{n}{n-1}}$.

21. (4p) Czy ciąg $a_n = \sqrt[n+2]{2}$ (czyli ciąg: $\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{2}, \ldots$) jest zbieżny? A jeśli tak, jaka jest jego granica?
Wskazówka: Zauważ, że $\sqrt[n]{2} - 1 < \frac{1}{n}$. *Możesz to wywnioskować ze swojej wiedzy na temat ciągu* $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

22. (2p) Udowodnij, że zbiory X i Y są równoliczne, ustawiając elementy pierwszego z nich w pary z elementami drugiego, tak by wykorzystac wszystkie.

(a) $X = (-1,1)$ (przedział otwarty), $Y = (2,4)$.

(b) $X = (0,1), Y = (0,4)$.

(c) X – okrąg o promieniu 1 i środku w punkcie $(0,0)$, Y – okrąg o promieniu 2 i środku w punkcie $(0,0)$

(d) X – koło o promieniu 3 i środku w punkcie $(-1,1)$, Y – koło o promieniu 1 i środku w punkcie $(1,-1)$

(e) $X = R^+ = (0,+\infty)$, $Y = \mathbb{R}$.

23. (3p) Rozstrzygnij, czy zbiory są przeliczalne, czy też są mocy continuum:

    (a) zbiór wszystkich punktów płaszczyzny o obu współrzędnych całkowitych,

    (b) zbiór wszystkich przedziałów otwartych na prostej o obu końcach wymiernych,

24. (3p) Udowodnij, że zbiory X i Y są równoliczne, ustawiając elementy pierwszego z nich w pary z elementami drugiego, tak by wykorzystac wszystkie.

    (a) $X = (0,1]$ (przedział z lewej otwarty, z prawej domknięty), $Y = (0,1)$.
    Wskazówka: Zbiory $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ *oraz* $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ *są równoliczne.*

    (b) $X = (0,1), Y = (0,1] \cup \{2,3\}$.

25. (4p) Udowodnij Tw. Cantora, czyli że żaden zbiór A nie jest równoliczny ze zbiorem wszystkich swoich podzbiorów.
    Wskazówka: Dowód nie wprost. Załóż, że można ustawić w pary zbiór A i jego podzbiory, tak że wszystkie podzbiory są w jakiejś parze. Użyj teraz argumentu przekątniowego konstruując na złość „zły" podzbiór. Uzależnij mianowicie to, czy $a \in A$ należy do „złego" podzbioru od tego, czy nie należy do zbioru stojącego w parze z elementem a. Okaże się, co jest sprzeczne z naszym początkowym założeniem, że „zły" podzbiór nie stoi w żadnej parze.

Użyte materiały do konstrukcji niektórych z powyższych zadań:

- „Co to jest matematyka?" R. Courant, H. Robbins
- „Zadań 100" H. Steinhaus
- „Wstęp do matematyki – zbiór zadań" W. Guzicki, P. Zakrzewski
- „Rachunek różniczkowy i całkowy" G. Fichtenholz