Ćwiczenia: liczby całkowite

Projekt „Matematyka dla ciekawych świata”
spisał: Michał Korch

3 marca 2016

1. (1p) Oblicz $x = \left(3^{12} \cdot 3^8\right)^2 : 9^{20}$, $y = \left[(-10)^{1000} + (-10)^{1001}\right]^2 : 10$, $z = 10^{12} : \left[(-8)^3 \cdot 25^4\right]$.
2. (1p) Oblicz $u = 8^{2000} \cdot \left[(-1)^{1001} + (-1)^{5001}\right] : 4$, $w = \left(2^{17} + 5 \cdot 2^{19}\right)^2 : \left[(-7) \cdot (-4)^8\right]^2$.
3. (1p) Wykaż, że suma pięciu kolejnych liczb naturalnych nie może być liczbą pierwszą.
4. (1p) Która liczba jest większa: 2^{791} czy 5^{339}?
   Wskazówka: Rozłóż wykładniki na czynniki.
5. (2p) Niech $\lfloor x \rfloor$ („podłoga z x”) oznacza największą liczbę całkowitą mniejszą lub równą x oraz $\lceil x \rceil$ („sufit z x”) oznacza najmniejszą liczbę całkowitą większą lub równą x. Oblicz $\lfloor 2 \rfloor$, $\lfloor 7{,}3 \rfloor$, $\lfloor -7{,}3 \rfloor$, $\lceil 2 \rceil$, $\lceil 7{,}3 \rceil$, $\lceil -7{,}3 \rceil$. Sprawdź, że:
   - $\lfloor x \rfloor = n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $n \le x < n + 1$, wtedy i tylko wtedy, gdy $x - 1 < n \le x$,
   - $\lceil x \rceil = n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $n - 1 < x \le n$, wtedy i tylko wtedy, gdy $x \le n < x + 1$.
6. (3p) Czy dla $x \ge 0$, $\left\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$? Podaj kontrprzykład lub udowodnij.
   Wskazówka: Skorzystaj z poprzedniego zadania.
7. (1p) Sprawdź, czy: $1 \equiv 0 \pmod 2$, $-2 \equiv 15 \pmod{13}$, $1 \equiv 7^{10} + 8 \pmod 7$, $2 \equiv 2789393 \pmod 5$, $4385 \equiv -39 \pmod{56}$, $-2^{2015} \equiv 0 \pmod{32}$, $3^{3^{723}} + 723 \equiv 0 \pmod 3$.
8. (1p) Sprawdź, czy $3^{2015} + 3^{2016} + 3^{2017}$ jest podzielne przez 13, a $7^{2015} - 7^{2014} + 7^{2016}$ przez 5.
9. (2p) Udowodnij, że prawdziwe są fakty o kongruencjach podane na wykładzie bez dowodu.
   Niech $a \equiv b \pmod m$ oraz $c \equiv d \pmod m$
   - $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod m$
   - $a \cdot c \equiv b \cdot c \pmod m$
   - $a + c \equiv b + c \pmod m$
10. (1p) Udowodnij, że jeśli $a \equiv b \pmod m$, to $a^2 \equiv b^2 \pmod m$ i $a^3 \equiv b^3 \pmod m$.
11. (2p) Udowodnij, że prawdziwy jest fakt o kongruencjach podany na wykładzie bez $\tilde{\text{d}}$owodu.
    Niech $a \equiv b \pmod m$ oraz $n \in \mathbb{N}$. Wtedy $a^n \equiv b^n \pmod m$.

    Wskazówka: W kolejnych zadaniach możesz korzystać z faktów z poprzednich zadań, nawet jesli ich nie udwodniłeś/aś.
12. (2p) Czy liczba nieparzysta i połowa następującej po niej liczby parzystej mogą mieć wspólny dzielnik większy niż 1?
13. (1p) Ile wynosi reszta z dzielenia przez 13 liczb 2^{2015} i 3^{2015}?
14. (1p) Ile wynosi reszta z dzielenia przez 11 liczb 10^{2015} i 5^{2015}?

15. (1p) Ile wynosi reszta z dzielenia przez 16 liczb 6^{2015} i 10^{2015}?

16. (3p) Pokaż, że liczba $\frac{3^{2015}-1}{2}$ jest nieparzysta i złożona.
Wskazówka: Jaką resztę daje 3^{2015} w dzieleniu przez 4? A przez 11?

17. (2p) Udowodnij, że liczba $5^{2016} + 4^{2017} + 3^{2015}$ jest podzielna przez 11.

18. (2p) Zaproponuj 4 inne zestawy wykładników potęg w zakresie od 2015 do 2019 w zadaniu 17, tak aby liczba nadal była podzielna przez 11.

19. (2p) Spróbujmy uogólnić zadanie 17. Czy dla każdego $k \in \mathbb{N}$ liczba $5^{5k+1}+4^{5k+2}+3^{5k}$ jest podzielna przez 11?

20. (3p) Na wykładzie uzasadniliśmy regułę podzielności dla 3 (suma cyfr) i wyprowadziliśmy dużo bardziej skomplikowaną regułę dla 7 (suma cyfr pomnożonych przez cyklicznie występujące współczynniki). Znajdź analogiczne reguły dla podzielności przez:
   - 11
   - 13

21. (1p) Sprawdź korzystając z Małego Twierdzenia Fermata, że:
   - $10^{22} \equiv 1 \pmod{23}$
   - $36^{6} \equiv 1 \pmod{7}$

22. (3p) Korzystając z Małego Twierdzenia Fermata udowodnij, że:
   - $2^{20} \equiv 1 \pmod{11}$
   - $9^{221} \equiv 9 \pmod{23}$
     Wskazówka: $221 = 10 \cdot 22 + 1$
   - $9^{32} - 2 \cdot 9^{16} \equiv 16 \pmod{17}$
   - $8^{24} \equiv 1 \pmod{35}$
     Wskazówka: $35 = 5 \cdot 7$

23. (4p) Niech p będzie liczbą pierwszą i nie dzieli a. Udowodnij, że najmniejsza liczba k, dla której $a^k \equiv 1 \pmod{p}$ jest dzielnikiem liczby $p-1$.
Wskazówka: Niech $p - 1 = nk + r$. Zauważ, że z Małego Twierdzenia Fermata mamy $a^k \equiv a^{nk+r} \equiv 1 \pmod{p}$. Z tego wywnioskuj, że $r = 0$.

24. (4p) Udowodnij, że liczba $3^{105} + 4^{105}$ jest podzielna przez $13, 49, 181$ i 379, ale nie jest podzielna przez 5 i 11.
Wskazówka: Trzeba zastosować fakt, że dla dowolnego nieparzystego n, $a^n + b^n$ jest podzielne przez $a + b$. Ponadto $3^3 + 4^3 = 7 \cdot 13, 3^5 + 4^5 = 7 \cdot 181, 3^7 + 4^7 = 49 \cdot 379$.

25. (4p) Udowodnij następującą ułatwioną wersję słynnego Wielkiego Twierdzenia Fermata. Nie istnieją liczby naturalne x, y, z, n większe od 0, takie że $n \geq z$ oraz $x^n + y^n = z^n$.
Wskazówka: Zauważ, że $z^n - y^n = (z - y)(z^{n-1} + yz^{n-2} + \ldots + y^{n-1})$. Następnie zauważ, że $x < z$ oraz (bez straty ogólności) załóż, że $x < y$ (trzeba też rozważyć prosty przypadek $x = y$), co pozwoli Ci oszacować wyrażenia w dużym nawiasie.

Użyte materiały do konstrukcji powyższych zadań:

- „Co to jest matematyka?” R. Courant, H. Robbins
- „Zadań 100” H. Steinhaus
- „Matematyka konkretna” R. Graham, D. Knuth, O. Patashnik