Zadania
cz. II. Jak zmierzyć?

Projekt „Matematyka dla ciekawych świata”
spisał: Michał Korch

3 marca 2016

Do tego rozdziału bardzo trudno znaleźć zadania w literaturze. We wszelkich podręcznikach akademickich zadania mają dużo bardziej abstrakcyjny charakter niż zadania tu potrzebne. Dlatego większość zadań jest wymyślona, a nie wzięta z jakiegoś źródła. Nieliczne zadania zaczerpnięto z:

- „Prawdopodobieństwo i miara”, P. Billingsley
- „Measure Thoery”, V. Bogachev
- „Teoria miary i całki Lebesgue'a - Zbiór zadań z rozwiązaniami”, T. Schreiber, J. Karłowska-Pik, K. Bartkiewicz i K. Jańczak

1 Łatwe

1. Policz następujące nieskończone sumy:
   - $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$
   - $3 + 2 + 1\frac{1}{3} + \frac{8}{9} + \dots$
   - $2014 + 212 + 22\frac{6}{19} + \dots$
   - $6 + 4 + 3 + 2 + 1\frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \dots$
   - $6 - 4 + 3 - 2 + 1\frac{1}{2} - 1 + \frac{3}{4} - \frac{1}{2} + \dots$
2. Policz następujące nieskończone sumy:
   - $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots$
   - $1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} + \dots$
   - $1 + \sqrt{2} + 2 + \dots$
3. Spróbujmy zsumować szereg
   $$1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$
   Mamy $(1-1) + (1-1) + \dots = 0$, jednocześnie $1 + (-1+1) + (-1+1) + \dots = 1$. Ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego mamy: $S = \frac{1}{2}$. Który wynik jest prawdziwy? Jakie wnioski możesz wyciągnąć z tego zadania?

4. Jakie jest infimum następujących zbiorów. Który z nich ma minimum (najmniejszy element)?
   - $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$,
   - $(0,1)$,
   - $[0,1]$,
   - R,
   - $\{-1, -4, -9, \ldots\}$,
   - długości odcinków $[1-\frac{1}{n}, 5+\frac{1}{n}]$,
   - pól prostokatów o bokach długości 1, $\frac{1}{n}$,
   - pól prostokatów o bokach długości n, $\frac{2}{n}$,
   - pól prostokatów o bokach długości n, $\frac{1}{n^2}$,
   - pól prostokatów o bokach długości 2^n, $\frac{1}{n}$,
   - wyrazów ciagu $a_n = (\sqrt{2})^n$,
   - wyrazów ciagu $a_n = (\frac{\sqrt{2}}{2})^n$.
5. Dyzio zaczął chodzić na zajęcia dla Ciekawych Świata. Po pierwszym trzech zajęciach doszedł do wniosku, że pola wszystkich trójkątów sa równe 0. Każdy z nich jest bowiem zbudowany z tej samej ilości odcinków o takim samym polu. Równym oczywiście 0. Określ dwa błędy, które popełnił Dyzio.
6. Przypomnij, dlaczego zbiory: liczb naturalnych i liczb wymiernych mają miarę 0.
7. Oblicz miarę zbioru wszystkich liczb niewymiernych.
8. Oblicz miarę zbioru $[1, 1\frac{1}{2}] \cup [2, 2\frac{1}{2^2}] \cup [3, 3\frac{1}{2^3}] \cup [4, 4\frac{1}{2^4}] \cup \ldots$.
   Wskazówka: Zsumuj odpowiedni szereg.

2 Troszeczkę mniej łatwe niż łatwe

1. Oblicz miarę zbioru wszystkich liczb będących pierwiastkiem jakiegoś równania kwadratowego o wymiernych współczynnikach.
   Wskazówka: Jak bardzo nieskończenie wiele elementów ma ten zbiór?
2. Oblicz miarę zbioru skonstruowanego tak, jak zbiór Cantora, ale z wycinaniem środkowej $\frac{1}{4}$ odcinków, zamiast środkowej $\frac{1}{3}$.
   Wskazówka: Postępuj podobnie jak w przypadku zbioru Cantora, czyli policz miary kolejnych coraz dokładnieszych pokryć.
3. Niech $A_1, A_2, \ldots$ będą zbiorami miary zero (niekoniecznie rozłącznymi). Udowodnij, korzystając z jednego z naszych postulatów dotyczących miary, że ich suma teoriomnogościowa $\bigcup_{n>0} A_n$ też jest miary zero.
4. Niech x będzie liczbą rzeczywistą. Wykaż (korzystając tylko z definicji miary Lebesgue'a), że $m(\{x\}) = 0$.
5. Niech $A, B \subseteq [0,1]$ będą zbiorami mierzalnymi. Udowodnij, że jeśli $m(A) + m(B) > 1$, to $A \cap B \neq \emptyset$.
   Wskazówka: Na przykład dowód nie wprost.

3 Jeszcze trochę mniej łatwe

1. Oblicz miarę zbioru $[2, 2\frac{1}{2}] \cup [3, 3\frac{1}{3}] \cup [4, 4\frac{1}{4}] \cup [5, 5\frac{1}{5}] \ldots$.
   Wskazówka: Oczywiście trzeba spróbować zsumować odpowiedni szereg. Nie jest to niestety szereg geometryczny, więc zadanie jest utrudnione. Aby spróbować go policzyć zblokuj kolejne wyrazy: pierwszy sam, drugi z trzecim, czwarty do siódmego, itd. Porównaj każdy blok z liczbą $\frac{1}{2}$.

2. Oblicz miarę zbioru Smitha-Volterra-Cantora, który konstruowany jest następująco: z odnicinka $[0, 1]$ usuwamy środkowy odcinek o długości $\frac{1}{4}$. Z powstałych 2 odcinków usuwamy ich środkowe fragmenty o długości $\frac{1}{16}$, itd., czyli w kroku, w którym mamy 2^n odcinków usuwamy z każdego z nich środkowy fragment o długości $\frac{1}{2^{2n+2}}$.

3. Niech $A_1, A_2, \ldots$ będą zbiorami miary zero (niekoniecznie rozłącznymi). Udowodnij, niekorzystając z naszego postulatu, a tylko z defnicji miary Lebesgue'a, że ich suma teoriomnogościowa $\bigcup_{n>0} A_n$ też jest miary zero.
   Wskazówka: Skonstruuj pokrycie całej sumy, biorąc coraz mniejsze pokrycia poszczególnych zbiorów. Np. jeśli wezmę pokrycie A_1 długości $\frac{1}{2}$, A_2 długości $\frac{1}{4}$ itd. suma tych pokryć pokryje sumę wszystkich zbiorów i będzie miała długość nie większą niż 1. Postępuj podobnie by pokryć sumę pokryciem nie dłuższym niż $\frac{1}{2}$, potem $\frac{1}{4}$, itd. Infimum tych długości to 0.

4. Oblicz polę trójkąta Sierpińskiego. Trójkąt Sierpińskiego otrzymuje się następująco: w trójkącie równobocznym łączy się środki boków, dzieląc go w ten sposób na cztery mniejsze trójkąty. Trójkąt środkowy usuwa się, a wobec trzech pozostałych trójkątów operację się powtarza, dzieląc każdy z nich na cztery mniejsze trójkąty, usuwając środkowy, a wobec pozostałych czynności się powtarzają. Punkty pozostające po nieskończenie wielu powtórzeniach tej operacji tworzą trójkąt Sierpińskiego.
   Wskazówka: Jest intuicyjne i daje dobry wynik pokrywanie tego zbioru trójkątami, a nie prostokątami. Niestety, rozumując tak, nie korzystamy z definicji, a z faktu, który nie został zaprezentowany. Takie rozwiązanie jest więc dobre, ale nie idealne w naszym stanie wiedzy. Aby ominąć tę trudność (i sporządzić bardzo dobre rozwiązanie), warto zauważyć, że trójąt sierpińskiego nie zmieni pola, jeśli będzie trójkątem prostokątnym o odpowiednich bokach. I rozważyć równoczeście dwa takie trójkąty.

5. Niech A będzie mierzalnym pozdbiorem odcinka $[0, 1]$, takim, że $m(A) > 0$ oraz a pewną liczbą rzeczywistą, taką że $0 < a < 1$. Udowodnij, że istnieje przedział I, taki że $m(A \cap I) \geq a \cdot m(I)$.

6. Udowodnij, korzystając z odpowieniego naszego postulatu dotyczącego miary, że jeśli A, B są zbiorami mierzalnymi, to $m(A) + m(B) = m(A \cup B) + m(A \cap B)$.

7. Niech A będzie zbiorem mierzalnym oraz B będzie zbiorem miary zero. Udowodnij, że $m(A \setminus B) = m(A \cup B) = m(A)$.

8. Skonstruuj taki zbiór $A \subseteq [0, 1]$, aby ten zbiór był „dziurawy", tzn. w każdy przedziale (p, q) dla $0 < p < q < 1$ istnieje $x \in (p, q) \setminus A$ oraz $m(A) = \frac{2}{3}$.

9. Wiedząc, że:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n} \qquad \xrightarrow{n \to \infty} \qquad \ln 2$$

   oblicz pole obszaru ograniczonego prostymi $y = 0, x = 0, x = 1$ oraz krzywą $y = \frac{1}{1+x}$.
   Wskazówka: Postępuj podobnie jak w przypadku pola pod parabolą.

4 Trudniejsze

1. Jaka jest moc zbioru wszystkich podzbiorów prostej o mierze 0?
   Wskazówka: Bardzo dużo. Zauważ, że dowolny podzbiór zbioru Cantora, który ma miarę 0*, jak wiemy, ma wobec tego miarę* 0

2. Czy istnieje taki podzbiór A prostej rzeczywistej, taki że $m(A) = \frac{1}{2}$ oraz $\mathbb{Q} \subseteq A$?
   Wskazówka: Ustaw liczby wymierne w ciąg (można, bo są przeliczalne) a następnie weź wokół kolejnych liczb coraz mniejsze odcinki.

3. Niech A będzie zbiorem leżącym na prostej, takim że $m(A) > 0$. Udowodnij, że istnieje taka liczba $\varepsilon > 0$, że dla każdego $r \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ istnieją punkty $x, y \in A$, takie że $x - y = r$.