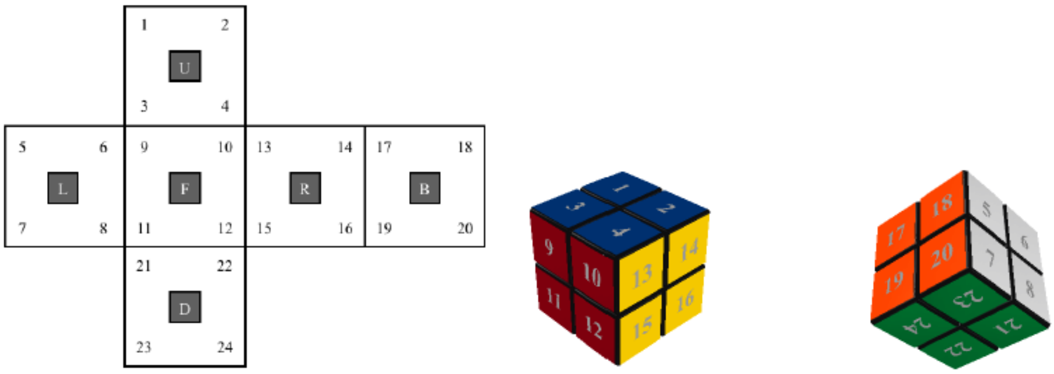
Permutacje i ich własności

1. (3 punkty) Dziesięciu więźniom w pewnym więzieniu dano szansę wyjścia na wolność. Ich imiona umieszczono (losowo) w 10 ponumerowanych pudełkach umieszczonych w rzędzie w w zamknietym pokoju. Każdego z wieźniów, po kolei, wpuszczano do pokoju z zadaniem odnalezienia pudełka ze swoim imieniem. W tym celu więzień mógł otwierać dowolne pudełka, w liczbie co najwyzej pięć. Po każdej wizycie skazańca pokój zostaje przywrócony do stanu wyjsciowego – wszystkie pudełka i wszystkie imiona wracaja dokładnie na swoje miejsce. Więźniowie nie mogą się komunikować po przystapieniu do realizacji zadania, ale mogą wcześniej ustalic wspólną strategię. Wszyscy odzyskaja wolność, jeżeli każdy z nich odnajdzie swoje imię. Czy istnieje strategia, która daje im szanse na opuszczenie więzienia wiekszą niz strategia losowa? Jak bardzo mogą oni zwiekszyć swoje szanse?

2. (2 punkty) Opisać permutacje (z rozkładem na cykle) opisujące obroty kostki Rubika $2x2x2$ przy oznaczeniach z poniższych rysunków.



3. (1 punkt)Przestawianka. Gra polega na przestawianiu klocków z numerami tak, aby znalazły się w kolejności rosnącej zwanej pozycją startową. Są trzy warianty gry w zależności od dozwolonych ruchów. Dozwolone ruchy to

   - (wariant 1)Przestawianie (zamiana kolejności) dwóch dowolnych klocków
   - (wariant 2)Przestawianie (zamiana kolejności) dowolnego klocka z klockiem pierwszym.
   - (wariant 3) Wybór dowolnych trzech klocków i przesuniecie cykliczne całej trójki z lewej strony na prawą.

   Opisać każdy z tych wariantów za pomoca permutacji.

4. (1 punkt) Wykonaj serię ruchów w każdym z opisanych wyżej wariantów dla układów klocków z rysunku.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	8	2	6	5	1	3	7	10	9

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
9	6	11	1	4	12	7	10	3	8	5	2

5. (2 punkty) Udowodnij, że z dowolnego początkowego ustawienia klocków można otrzymać pozycję startową jesli wykonujemy przestawienia tak jak w wariancie 1.

6. (3 punkty) Udowodnij, że z dowolnego początkowego ustawienia klocków można otrzymać pozycję startową jesli wykonujemy przestawienia tak jak w wariancie 2.

7. (3 punkty) Czy można wykonując przestawienia jak w wariancie 3 otrzymać z następującego układu pozycję startową.

1	2	3	4	5	6
2	6	4	1	3	5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	10	9

Dla jakiego ustawienia początkowego można otrzymać pozycję startową?

8. (2 punkty) Tasujemy 2n kart w następujący sposób: dzielimy talię dokładnie na pół po czym obie połowy przeplatamy tak, że karta pierwsza i ostatnia zostają na swoich pozycjach. Pokazać, że takie tasowanie jest pozbawione losowości: po skończonej liczbie kroków wrócimy do pozycji wyjsciowej. Znaleźć tę liczbę gdy talia ma 8 kart, 12 oraz gdy ma ona 52 karty.
Rozwiązanie Dla 8 kart takie tasowanie to permutacja (zapisuję tylko dolny wiersz)$(1, 2, 5, 7, 2, 4, 6, 8)$ czyli w rozkładzie na cykle $(2, 3, 5)(4, 7, 6)$ Dla 52 kart to $(1, 3, 5, 7, ..., 51, 2, 4, 6, ..., 52)$ tutaj zamiast rozkładać na cykle wygodniej jest ponumerować karty od 0 do 51 i wtedy jak odrzucimy ostatnią kartę (i tak nie jest ona tasowana) to tasowanie odpowiada przekształceniu $f(i) = 2i(mod 51)$