

## Permutacje i ich własności

1. Obliczyć  $\sigma \circ \tau$  oraz  $\tau \circ \sigma$  jeśli  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  oraz  $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$  są permutacjami ze zbioru  $S_5$ .

2. Znajdź permutację odwrotną do

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 7 & 6 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Znajdź permutację  $\tau \in S_5$  spełniającą warunek

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \tau \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Dana jest permutacja

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 2 & 1 & 7 & 11 & 8 & 6 & 10 & 4 & 5 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

(a) Rozłożyć  $\sigma$  na iloczyn rozłącznych cykli. *Rozkład cykliczny warto zilustrować graficznie*

(b) Rozłożyć  $\sigma$  na iloczyn transpozycji

(c) Obliczyć  $\tau \circ \sigma \circ \tau^{-1}$ , gdy  $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 3 & 5 & 7 & 11 & 6 & 1 & 10 & 4 & 8 & 2 & 9 \end{pmatrix}$ .

*Proszę zwrócić uwagę, że po sprzężeniu zachowują się długości cykli*

(d) Znaleźć najmniejsze  $k$  takie, że  $\sigma^k = id$

5. Rozłożyć na iloczyn transpozycji (1587)(439)

6. Obliczyć  $\tau \circ \sigma$ , gdy

(a)  $\tau = (23)(15)(47)(69)$  oraz  $\sigma = (17)(28)(59)$

(b)  $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 1 & 5 & 8 & 9 & 4 & 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}$  oraz  $\sigma = (17)(28)(59)$

(c)  $\tau = (13798)(25)(46)$  oraz  $\sigma = (1354872)(69)$ .

*W każdym z tych przykładów zapisać wynik na różne możliwe sposoby tabelka, iloczyn cykli rozłącznych, iloczyn transpozycji*

7. Pokazać, że składanie rozłącznych cykli jest przemienne.

8. Jaki jest rząd cyklu długości  $k$ ? Jak się wyraża rząd permutacji w zależności od długości rozłącznych cykli w rozkładzie? // *Proszę (w miarę możliwości) nie używać brzydkich słów w rodzaju rząd permutacji*

9. Obliczyć  $[(2457)(136)(89)]^{2016}$

10. Obliczyć  $\tau^{35} \circ \sigma^{-40}$  gdy

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 8 & 9 & 4 & 3 & 7 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

oraz

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 8 & 7 & 1 & 9 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

11. Przedstawić symetrie trójkąta równobocznego i kwadratu jako permutacje zbioru wierzchołków. Czy każda permutacja czterech wierzchołków kwadratu jest symetrią?

12. Jacek startuje w turnieju. Zadanie polega na tasowaniu talii 24 kart w następujący sposób. Na początku trzeba odliczyć 13 kart z góry talii a następnie pierwszą i ostatnią kartę z talii przełożyć do środka w odliczone miejsce (najpierw pierwszą potem ostatnią). Wygrywa ten z zawodników, który pierwszy ułoży karty w taki sposób w jakim znalazły by się one w talii po wykonaniu miliona ruchów. Pomóż Jackowi wygrać.

*Każdy ruch to permutacja 24 elementów będąca iloczynem dwóch rozłącznych cykli. Jednego długości 13 a drugiego długości 11. Wystarczy znaleźć reszty z dzielenia  $10^6$  przez 13 i 11.*

13. Rozwiązać równanie z niewiadomą permutacją  $x \in S_5$ ,

$$\sigma^{245} \tau^{111} x \sigma^{111} \tau^{245} = \sigma^{240} \tau^{244}$$

gdzie  $\sigma = (1, 2, 3, 4)$ ,  $\tau = (1, 2)(3, 4, 5)$

14. Znaleźć złożenie permutacji  $\tau \circ \sigma$   $\sigma \circ \tau$   $\sigma^2$   $\nu \circ \tau$   $\sigma \circ \nu$   $\sigma \circ \tau \circ \nu$  gdy

$$\tau = (AZ)(BY)(CX)(DW)(EV)(FU)(GT)(HS)(IR)(JQ)(KP)(LO)MN$$

$$\sigma = (ABCDEFGHIJKLMNPRSTUVWXYZ)$$

$$\nu = (ZYXWVUTSRQPONMLKJIHGFEDCBA).$$

15. Znaleźć złożenia  $\tau \circ \rho$   $\tau \circ \nu$  gdzie  $\tau$   $\sigma$  są permutacjami z poprzedniego zadania,  $\nu = \sigma \circ \tau$  a

$$\rho = (AB)(CD)(EF)(GH)(IJ)(KL)(MN)(OP)(QR)(ST)(UV)(WX)(YZ).$$

*Proszę zwrócić uwagę, że w rozkładzie na cykle otrzymanych permutacji cykle ustalonej długości występują w parach*