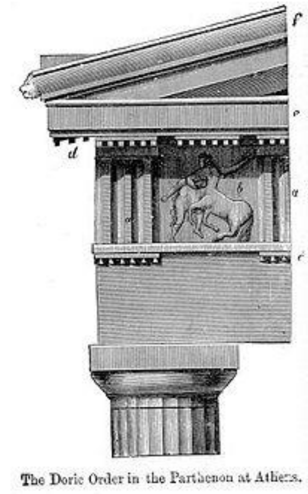
METODY KONSTRUKCJI ZA POMOCĄ CYRKLA

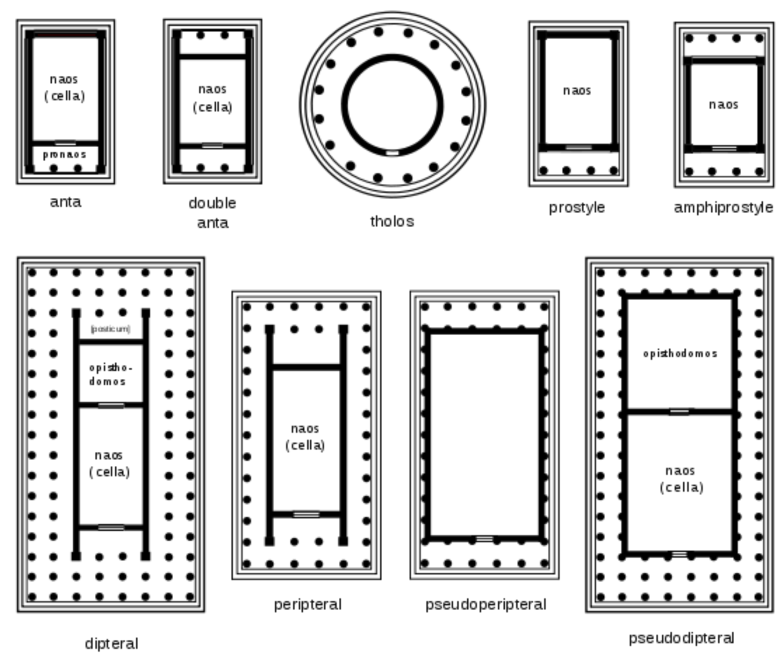
WYKŁAD 1

Czas: 45’

O KONSTRUKCJACH GEOMETRYCZNYCH

1. Starożytni matematycy posługiwali się konstrukcjami geometrycznymi.
2. Wykonanie konstrukcji polega na narysowaniu figury geometrycznej spełniającej podane warunki, przy pomocy określonych przyrządów konstrukcyjnych.
3. Starożytne narzędzia: trzymając liny w rękach dwie osoby mogą
   - zakreślić okrąg i
   - wyznaczyć odcinek (w teorii: linie proste).
4. Bez konstrukcji geometrycznych nie byłoby wielu słynnych budowli starożytności.



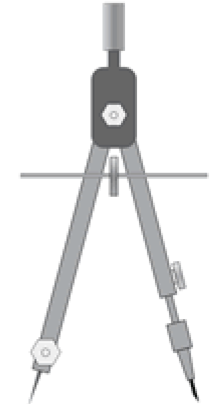


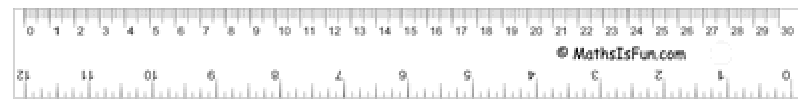
KLASYCZNE KONSTRUKCJE

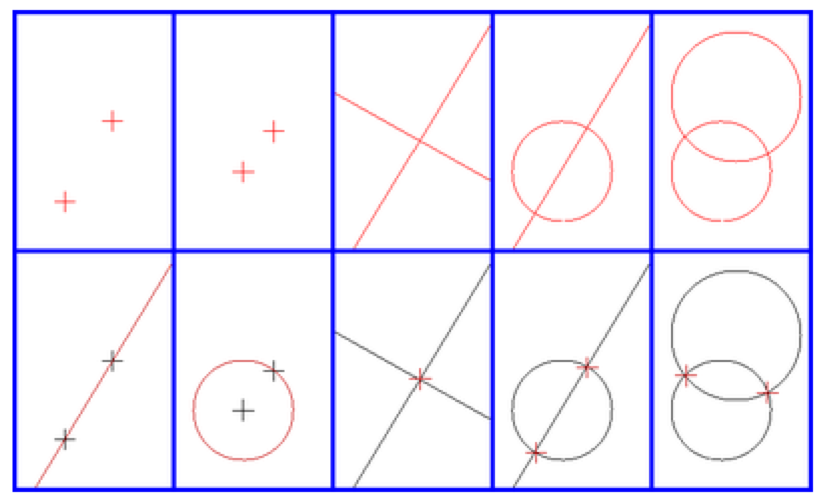
Najstarszymi konstrukcjami geometrycznymi są konstrukcje za pomocą **cyrkla i linijki**, zw. również *konstrukcjami klasycznymi* (lub *platońskimi*).

Takie konstrukcje umożliwiają

1. poprowadzenie prostej przez dane dwa punkty,
2. konstrukcję okręgu o danym środku i danym promieniu,
3. znalezienie punktów przecięcia wykreślonych prostych i okręgów
4. wybór dowolnego punktu na skonstruowanej linii (prostej lub okręgu).



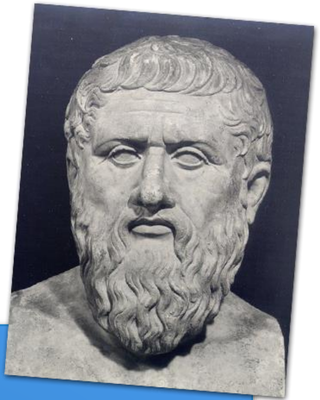




KONSTRUKCJE PODSTAWOWE

Konstrukcjami klasycznymi są np.

1. Konstrukcja symetralnej odcinka
2. Konstrukcja dwusiecznej kąta
3. Konstrukcja prostej prostopadłej do danej przechodzącej przez dany punkt.
4. Konstrukcja prostej równoległej do danej przechodzącej przez dany punkt.



Pogląd szkoły filozoficznej Platona głosi, że

prosta i okrąg to najdoskonalsze figury!

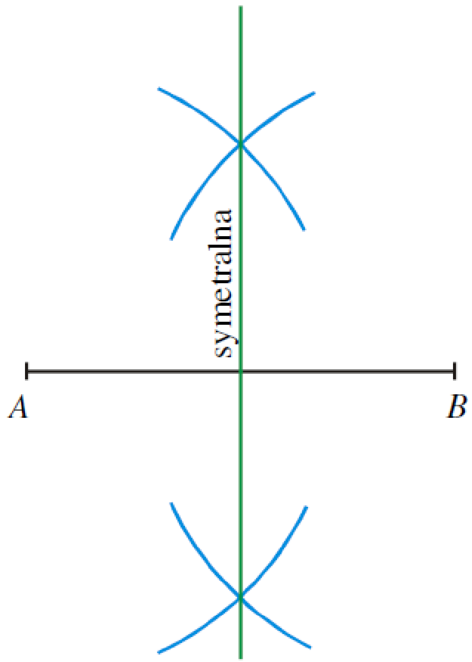
Wobec tego wszystko, co najważniejsze w matematyce powinno się dać wyrazić przy pomocy tych figur, a więc w konsekwencji przy użyciu cyrkla i linijki.

Konstrukcje geometryczne (zwane niekiedy *platońskimi*) występują już w *Elementach* Euklidesa.

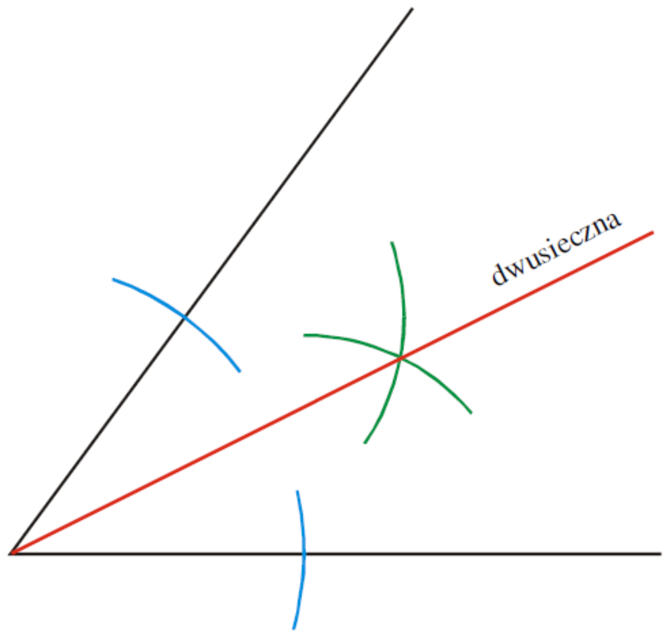
Aby rozwiązać zadanie, np. arytmetyczne, budowano odpowiedni model geometryczny.

KONSTRUKCJE PODSTAWOWE - PRZYKŁADY

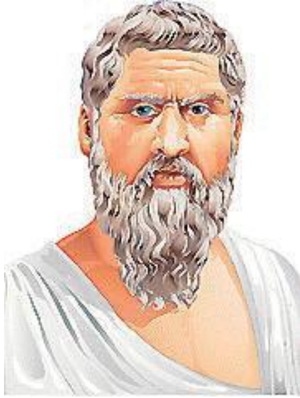
1. Z konców danego odcinka zakreślamy dwa łuki o takich samych promieniach tak, by się przecięły w dwóch punktach.
2. Te dwa punkty wyznaczają symetralną odcinka.



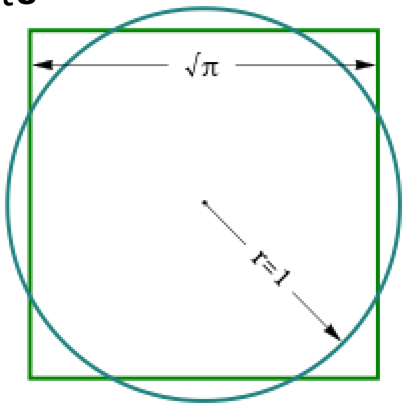
1. Z wierzchołka danego kąta zakreślamy łuk tak, by przeciął ramiona kąta.
2. Z punktów przecięcia łuku z ramionami zakreslamy dwa łuki o jednakowych promieniach tak, by się przecięły w jednym punkcie.
3. Prowadzimy prostą przez uzyskany przed chwilą punkt i wierzchołek kąta. Ta prosta to dwusieczna.



WYKONALNOŚĆ KONSTRUKCJI



1. **Konstrukcje niewykonalne:** Nie wszystkie zadania konstrukcyjne dają się wykonać metodą cyrkla i linijki, np.
   - **Podwojenie sześcianu**
   - **Trysekcja kąta**
   - **Kwadratura koła**
   - **Wyprostowanie okręgu**



2. Niektóre zadania konstrukcyjne można wykonać przy jeszcze większym ograniczeniu środków niż w metodzie cyrkla i linijki:
   - **Konstrukcje Mohra-Mascheroniego.**
   - **Konstrukcje Ponceleta - Steinera**

3. Analogiczna do metody cyrkla i linijki na płaszczyźnie metoda konstrukcji geometrycznych w przestrzeni pozwala:
   - poprowadzić płaszczyznę przez trzy dane niewspółliniowe punkty,
   - skonstruować sferę o danym środku i o danym promieniu,
   - znaleźć linię przecięcia dwóch skonstruowanych powierzchni (płaszczyzn i sfer),
   - wybrać dowolny punkt na skonstruowanej powierzchni,
   - poprowadzić prostą przez dane dwa punkty oraz wykonać dowolną konstrukcję geometryczną metodą cyrkla i linijki na utworzonej powierzchni.

TWIERDZENIE MOHRA-MASCHERONIEGO

> ***Jeżeli dana konstrukcja geometryczna jest wykonalna za pomocą cyrkla i linijki, to jest wykonalna za pomocą samego cyrkla, pod warunkiem, że ograniczymy się do wyznaczania punktów konstrukcji, a pominiemy rysowanie linii.***

1. Wynik ten został opublikowany w roku 1672 przez Georga Mohra, był jednak nieznany aż do roku 1928.
2. Niezależnie od Mohra twierdzenie zostało odkryte przez Lorenzo Mascheroniego w roku 1797.

DOWÓD TWIERDZENIA

Idea dowodu:

Każda konstrukcja jest sekwencją kroków, w których wykonywane są następujące czynności:

1. *poprowadzenie prostej przez dane dwa punkty;*
2. *konstrukcja okręgu o danym środku i danym promieniu*
3. *wyznaczanie punktu przecięcia dwóch prostych;*
4. *wyznaczanie punktów przecięcia dwóch okręgów;*
5. *wyznaczanie punktów przecięcia prostej z okręgiem;*
6. *wybór dowolnego punktu na skonstruowanej linii (prostej lub okręgu).*

Wystarczy pokazać, że następujące konstrukcje są możliwe za pomocą jedynie cyrkla:

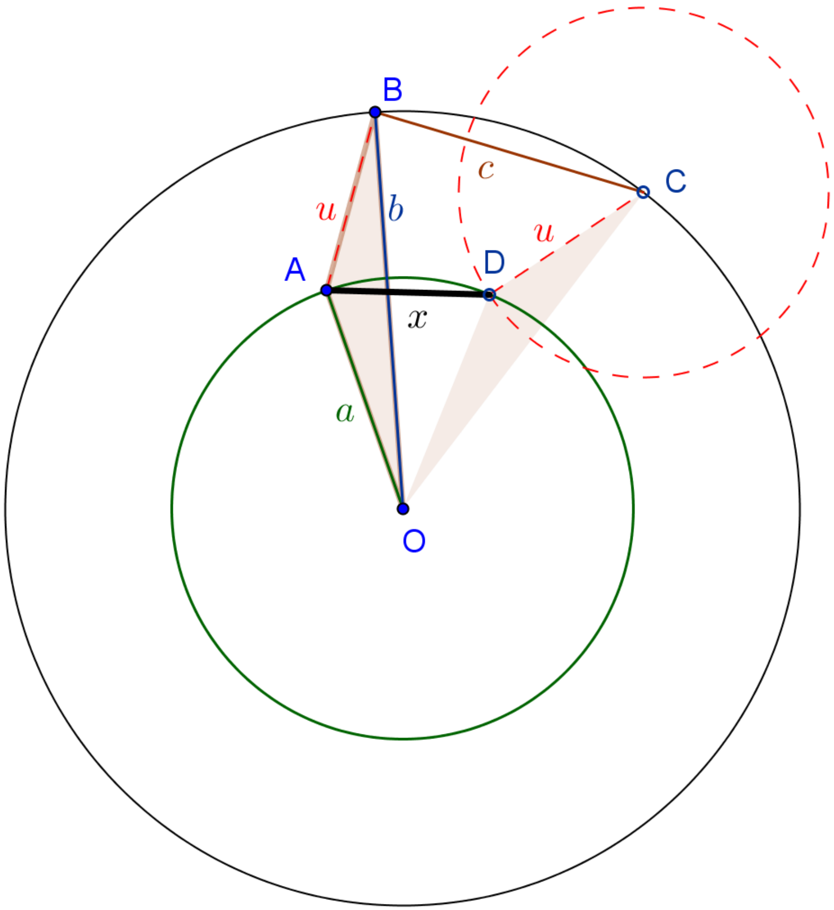
- *(1M) Konstrukcja odbicia symetrycznego punktu względem danej prostej;*
- *(2M) Konstrukcja odcinka k razy dłuższego niż dany odcinek dla dowolnej liczby wymiernej* $k>0$*;*
- *(3M) Konstrukcja czwartego odcinka proporcjonalnego do trzech innych odcinków;*
- *(4M) Konstrukcja środka łuku znając środek okręgu.*

Konstrukcje (1M), (2M), (4M) są zadaniami podczas ćwiczeń.

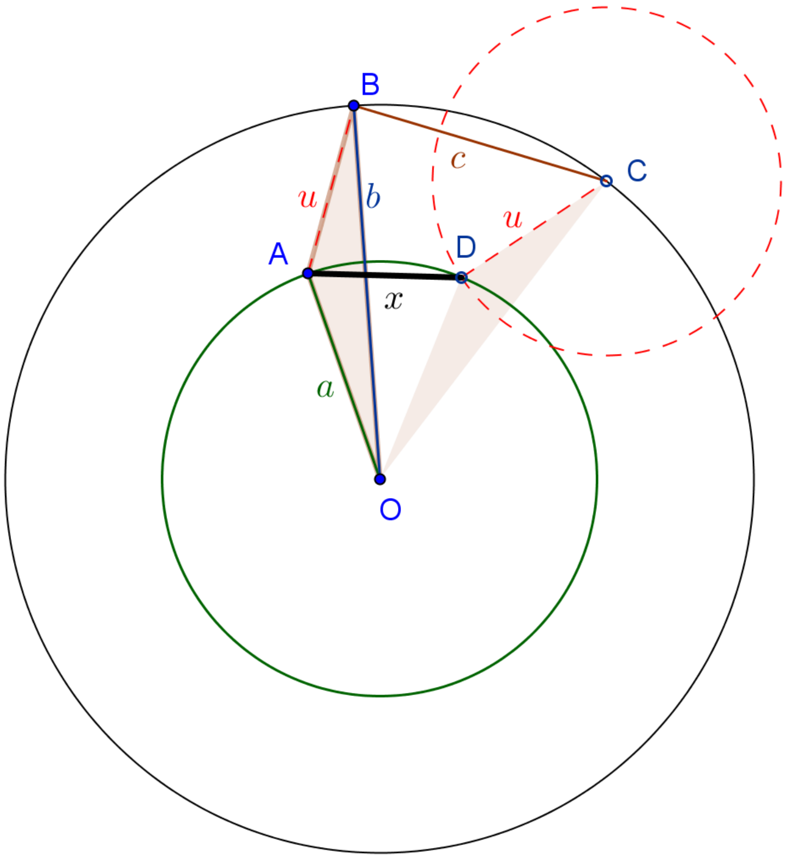
KONSTRUKCJA (M3)

Dane są 3 odcinki o długościach a, b, c,
skonstruuj odcinek o długości x takiej, że x/c = a/b

1. *Wybierz dowolny punkt O*
2. *Narysuj 2 okręgi (O,a) i (O,b)*
3. *Wybierz A na (O,a) i B na (O,b)*
4. *Okrąg (B,c) przecina (O,b) w punkcie C*
5. *Okrąg (C,u), gdzie u = |AB| przecina (O,a) w D (uwaga na kierunek)*
6. *AD jest szukanym odcinkiem!*



DOWÓD POPRAWNOŚCI

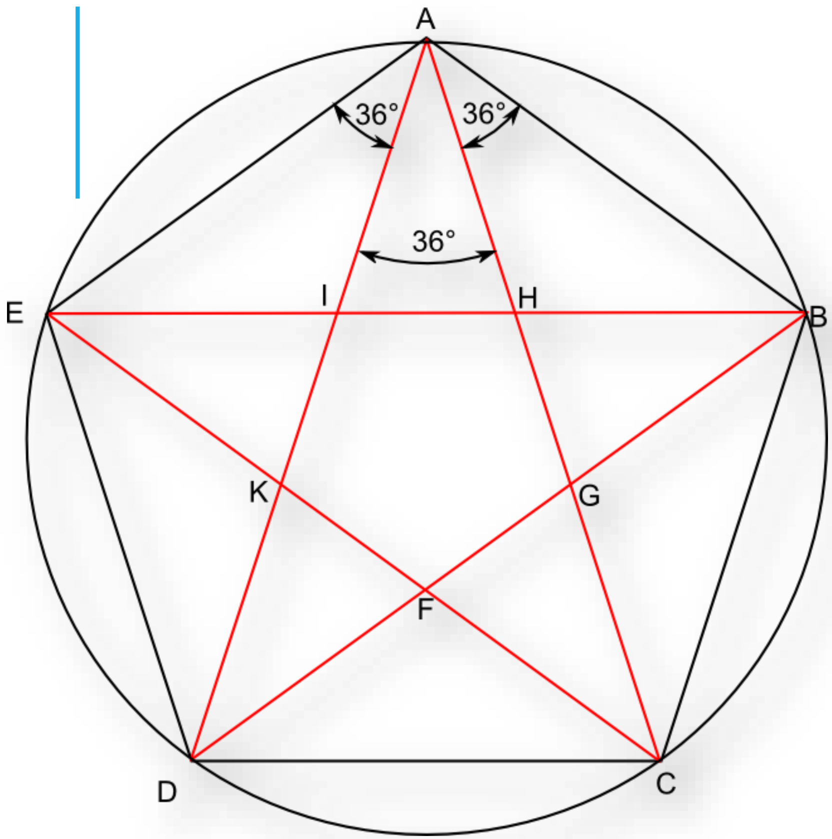


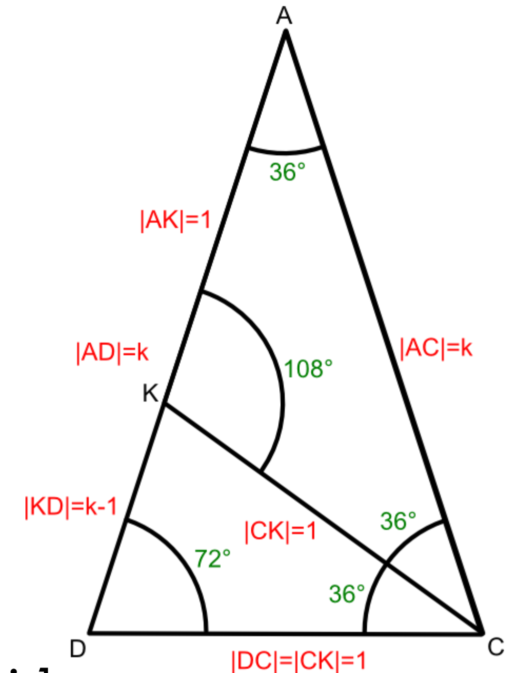
- Trójkąty *OAB* i *ODC* są przystające (bbb)
- $=> \widehat{AOB} = \widehat{DOC} => \widehat{AOD} = \widehat{BOC}$
- OAD i OBC są trójkątami równoramiennymi i mają takie same kąty przy wierzchołku, więc mają odpowiednie kąty równe.
- Zatem trójkąty OAD i OBC są podobne.
- Stąd wynika, że

$$\frac{|AD|}{|OA|} = \frac{|BC|}{|OB|} \Rightarrow |AD| = \frac{a \cdot c}{b}$$

- Czyli AD jest szukanym odcinkiem.

PIĘCIOKĄT FOREMNY





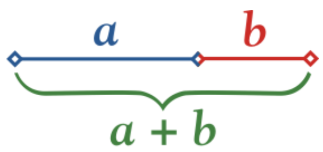
- Załóżmy, że
  - bok pięciokąta wynosi 1
  - długość przekątnej wynosi k
- Wówczas, z rachunku kątów wynika, że trójkąty o bokach (k,k,1) i (1,1,k-1) są podobne.
- Zatem

$$\frac{k}{1} = \frac{1}{k-1} \Rightarrow k^2 - k - 1 = 0$$

$$\Rightarrow k = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

ZŁOTY PODZIAŁ - ZŁOTA PROPORCJA - LICZBA φ

Podział odcinka na dwa odcinki a i b nazywamy ***złotym podziałem***, jeśli



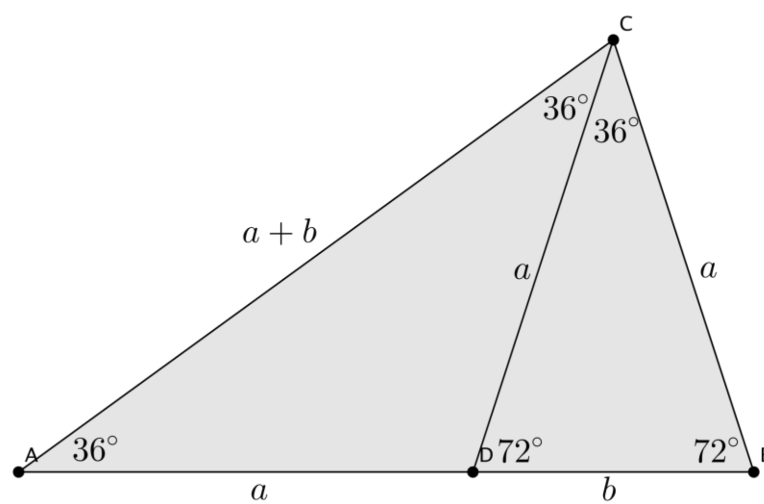
$$\frac{b}{a} = \frac{a}{a+b}$$

wartość tych stosunków nazywamy też ***złotą proporcją*** i oznaczamy symbolem φ.
Możemy obliczyć wartość φ:

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$$
$$a^2 = ab + b^2$$
$$a^2 - ab - b^2 = 0$$
$$a = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4b^2}}{2}$$
$$\frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

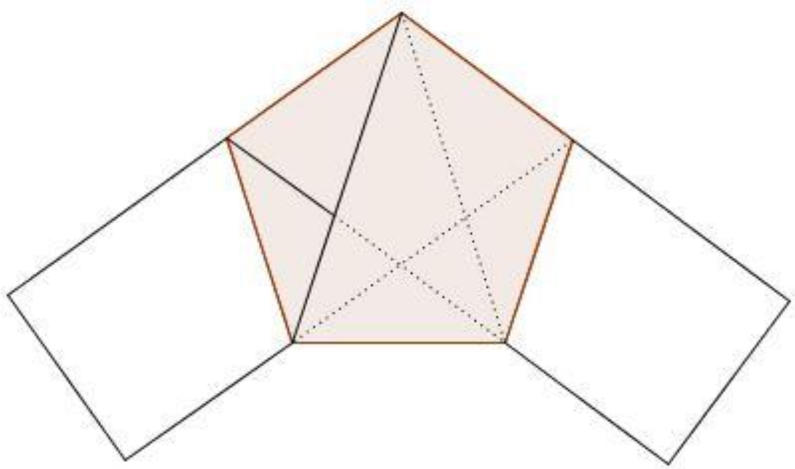
Odwrotnie:

- Jeśli w trójkącie równoramiennym, stosunek ramion do podstawy wynosi φ, to kąty tego trójkąta wynoszą 36, 72 i 72
- Jeśli w trójkącie równoramiennym, stosunek podstawy do ramion wynosi φ, to kąty tego trójkąta wynoszą 108, 36 i 36

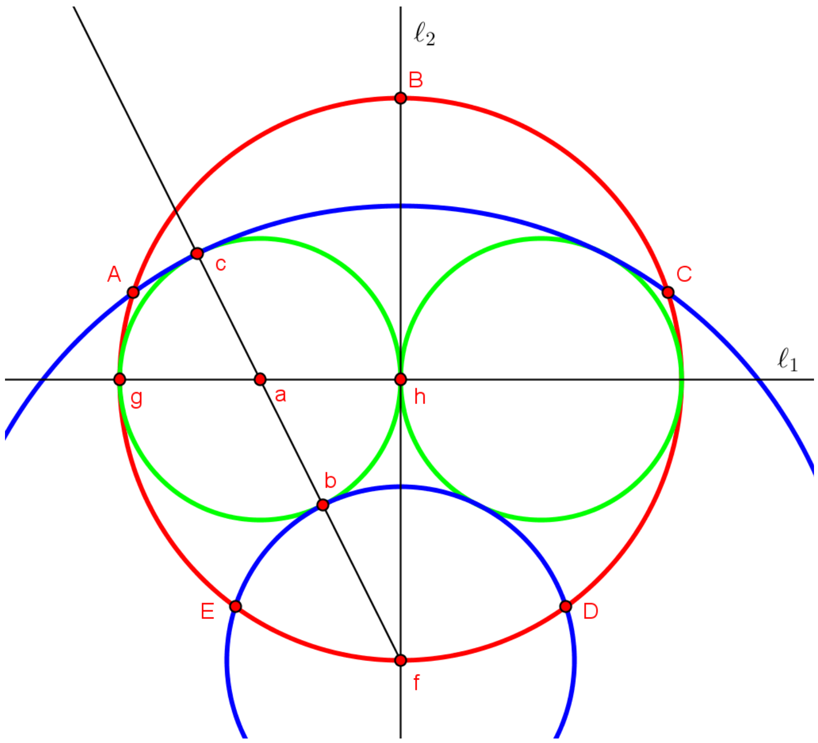


KONSTRUKCJA PIĘCIOKĄTA FOREMNEGO

Wystarczy pasek papieru?

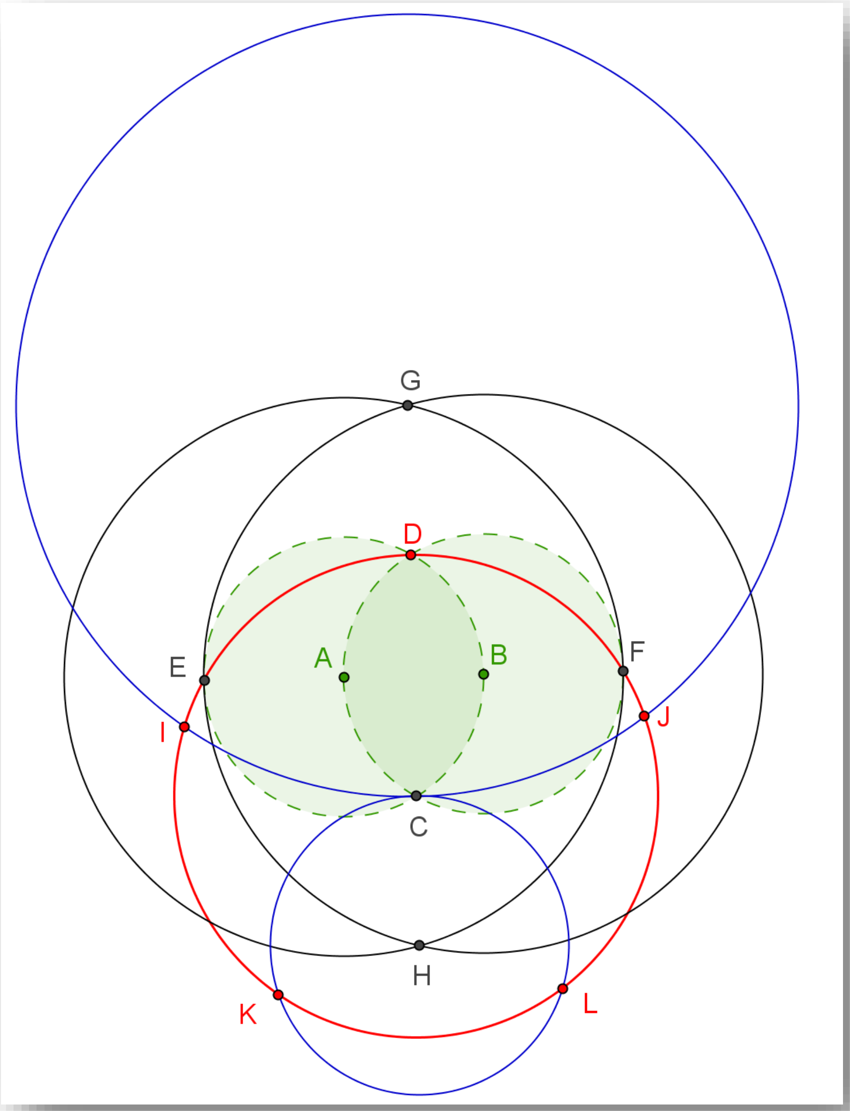


Cyrklem i linijką?

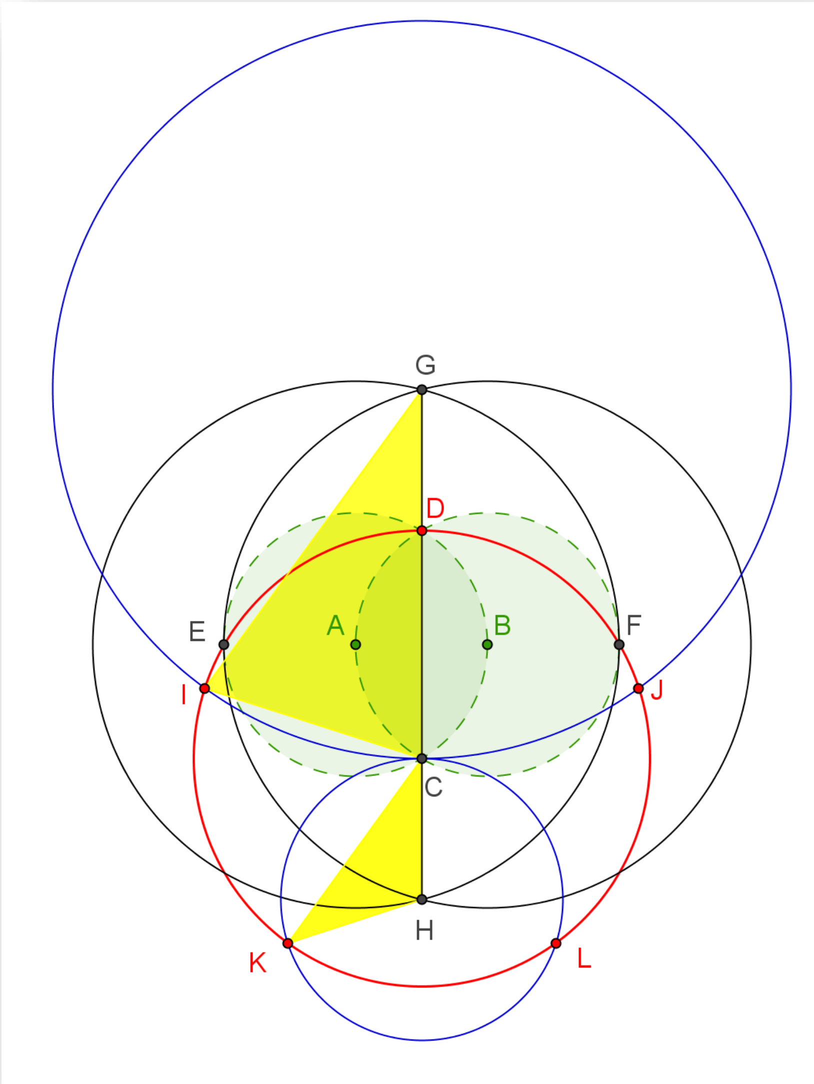


PIĘCIOKĄT FOREMNY CYRKLEM

1. Wybierzemy 2 punkty A i B;
2. $C_1 = A(B)$,
3. $C_2 = B(A)$
4. C_2 przecina C_1 w punktach C i D;
5. $C_3 = C(D)$;
6. C_3 przecina C_1 i C_2 w punktach E i F,
7. $C_4 = A(F)$,
8. $C_5 = B(E)$
9. C_5 przecina C_4 w G i H;
10. $C_6 = G(C)$
11. C_6 przecina C_3 w punktach I i J;
12. $C_7 = H(C)$
13. C_7 przecina C_3 w punktach K i L.
14. Wówczas DIKLJ jest pięciokątem foremnym.



DOWÓD KONSTRUKCJI



1. *Punkty C, D, G, H są współliniowe oraz D dzieli CG, i C dzieli DH, w złotej skali.*

2. *Stąd wynika, że w trójkącie GCI,*

   GC/IC = GC/DC = φ.

   Czyli kąty przy podstawach: ∠DCI = 72° i ∠DCJ = 72°.

3. *Analogicznie w trójkącie HCK,*

   KC/CH = DC/CH = φ.

   Zatem ∠KCH = 36° i ∠LCH = 36°, wynika stąd, ∠KCL = 72°.

4. *Skoro punkt C leży na prostej GH,*

   ∠ICK = 180°- ∠GCI - ∠KCH = 72°.

   Przez symetrię mamy: ∠JCL = 72°.

5. *Pięć punktów D, I, K, L, J są równomiernie rozmieszczone na okręgu* C_3*.*

Te punkty tworzą ***pięciokąt foremny****.*