Ćwiczenia: liczby naturalne

Projekt „Matematyka dla ciekawych świata”
spisał: Michał Korch

23 grudnia 2014

1. (1p) Skonstruuj sito Erastotenesa: wypisz na kartce liczby od 1 do 100 (na przykład w kwadracie 10 na 10). Wykreśl liczbę 1. Następnie postępuj iteracyjnie następująco, dopóki wszystkie liczby nie są wykreślone lub zakreślone w kółko:

   - zakreśl w kółko pierwszą nieskreśloną liczbę,
   - wykreśl wszystkie kolejne liczby przez nią podzielne.

   Jakie liczby zostały zakreślone w kółko? Dlaczego?

2. (1p) Przypatrz się nazwom kolejnych liczb w języku papuaskiego plemienia Wedau:

   1 tagogi

   2 ruag'a

   3 tonug'a

   4 ruag'a-ma-ruag'a

   5 ura-i-ga

   6 ura-g'ela-tagogi

   7 ura-g'ela-ruag'a

   8 ura-g'ela-tonug'a

   9 ura-g'ela-ruag'a-ma-ruag'a

   10 ura-ruag'a-i-ga

   Jakie prawidłowości widzisz? Dlaczego Twoim zdanie te, a nie inne, liczby zostały użyte do tworzenia kolejnych?

3. (2p) Jaka jest najmniejsza liczba naturalna, która ma:

   - dokładnie 2 dzielniki?
   - dokładnie 3 dzielniki?
   - dokładnie 4 dzielniki?
   - dokładnie 5 dzielników?
   - dokładnie 6 dzielników?

4. (2p) Dowód Euklidesa, o tym, że jest nieskończenie wiele liczb pierwszych sugeruje przyjrzenie się liczbom będącym iloczynem początkowych n liczb pierwszych zwiększonym o jeden. Np. $2 \cdot 3 + 1 = 5$ (iloczyn dwóch początkowych liczb pierwszych zwiększony o jeden) jest liczbą pierwszą. Czy zawsze tak skonstruowana liczba (iloczyn trzech, czterech, itd. początkowych liczb pierwszych zwiększony o 1) jest pierwsza? Odpowiedź uzasadnij.

5. (2p) Zmodyfikujmy konstrukcję z poprzedniego zadania definiując tzw. liczby Euklidesa. Pierwsza liczba Euklidesa to 2 ($e_1 = 2$). Kolejna liczba Euklidesa to iloczyn poprzednich liczb Euklidesa zwiększony o 1 (czyli $e_2 = e_1 + 1 = 2 + 1 = 3$, $e_3 = e_1 \cdot e_2 + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$, itd.). Czy każda liczba Euklidesa jest liczbą pierwszą? Odpowiedź uzasadnij.

6. (2p) Na wykładzie poznałeś ciąg Fibonacciego. Stwórz podobny wzór rekurencyjny pasujący do ciągu:

$$0, 1, 1, 3, 5, 11, 21, \ldots.$$

   Wymyśl zjawisko lub proces w świecie rzeczywistym, w której rolę odgrywa ten ciąg.
   Wskazówka: Historyjka jak z królikami Fibonacciego, z tym że każda para królików generuje 2 *pary młodych.*

7. (3p) Na pirackim statku znajduje się skarb złożony z 10 dukatów (dukaty są niepodzielne). Na statku jest też 5 piratów: Alojzy, Bonifacy, Cezary, Dionizy i Eustachy. Hersztem bandy jest zawsze osoba o pierwszym imieniu w kolejności alfabetycznej. Piraci dzielą skarb pomiędzy siebie następującą piracko-demokratyczną metodą. Herszt bandy proponuje podział i ten podział jest głosowany. Jeśli za jest większość (ponad połowa) piratów, podział dochodzi do skutku. W przeciwnym wypadku, herszt jest wyrzucany do rekinów za burtą, kolejny pirat zostaje hersztem i procedura zaczyna się od początku w mniejszym gronie. Każdy pirat chce zyskać możliwie dużo, ale jeśli nie ma to wpływu na zysk, każdy zagłosuje tak, żeby herszt został wyrzucony za burtę. Każdy pirat również woli nic nie dostać ze skarbu niż wylądować za butrą. Jaki podział skarbu zaproponuje herszt Alojzy?
   Wskazówka: Gdyby na statku byli tylko Dionizy i Eustachy, hersztem byłby Dionizy. Cokolwiek zaproponuje, Eustachy zagłosuje przeciw i wyrzuci go zgodnie z zasadami na burtę, bo przecież zostając sam będzie miał cały skarb. Pomyśl, co, wiedząc o tym, zaproponuje Cezary, jeśli na statku byliby Cezary, Dionizy i Eustachy.

8. (3p) Matematycy definiując formalnie liczby naturalne utożsamiają zero ze zbiorem pustym (ozn. $\varnothing$), a liczbę n definiują jako zbiór wszystkich liczb od niej mniejszych ($n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Zatem $0 = \varnothing, 1 = \{0\} = \{\varnothing\}, 2 = \{0, 1\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$. Wypisz w ten sposób liczbę 4.
   Wskazówka: $3 = \{0, 1, 2\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$.

9. (2p) Jak w hotelu Hilberta (pokoje numerowane od zera) zakwaterować elementy następujących zbiorów?
   - $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$
   - $\mathbb{N} \cup \{\pi\}$
   - $\mathbb{N} \setminus \{2014\}$
   - zbiór liczb parzystych.

10. (3p) Jak w hotelu Hilberta (pokoje numerowane od zera) zakwaterować elementy następujących zbiorów?
    - $\{\frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$.
    - $\{\frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.
    - liczby całkowite ($\{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \ldots\}$).

Użyte materiały do konstrukcji powyższych zadań:

- „Wykłady z historii matematyki", M. Kordos
- „Matematyka konkretna", R. Graham, D. Knuth, O. Patashnik