Ćwiczenia 1

1 Jak policzyć?

Zadania pochodzą z:

- „Wstęp do matematyki – zbiór zadań”, W. Guzicki, P. Zakrzewski
- materiały przygotowane do ćwiczeń ze Wstępu do matematyki na MIMUW, Michał Korch
- „Elementy logiki i teorii mnogości w zadaniach”, W. Marek, J. Onyszkiewicz
- Zadania z podstaw matematyki dla 1 roku informatyki, MIMUW.

Spisał: Michał Korch

1.1 Łatwe

1. Udowodnij, że zbiory X i Y są równoliczne, ustawiając elementy pierwszego z nich w pary z elementami drugiego, tak by wykorzystac wszystkie.
   (a) $X = \mathbb{N} = \{0,1,2,3,\dots\}, Y = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1,2,3,4,\dots\}$.
   (b) $X = \mathbb{N}, Y = \mathbb{N} \setminus \{2014\}$.
   (c) $X = \mathbb{N} \cup \{\pi\}, Y = \mathbb{N}$.
   (d) X – zbiór liczb parzystych, $Y = \mathbb{N}$.
   (e) $X = \mathbb{Z} = \{0,1,-1,2,-2,3,-3,\dots\}, Y = \mathbb{N}$.
   (f) $X = \mathbb{N} \cup \{\pi, 2\pi\}, Y = \mathbb{N}$.
   (g) $X = \{\frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}, Y = \mathbb{N}$.
   (h) $X = \{\frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}, Y = \mathbb{N}$.
   (i) $X = (-1,1)$ (przedział otwarty), $Y = (2,4)$.
   (j) $X = (0,1), Y = (0,4)$.
   (k) X – okrąg o promieniu 1 i środku w punkcie $(0,0)$, Y – okrąg o promieniu 2 i środku w punkcie $(0,0)$
   (l) X – koło o promieniu 3 i środku w punkcie $(-1,1)$, Y – koło o promieniu 1 i środku w punkcie $(1,-1)$
   (m) $X = (-\pi,\pi), Y = \mathbb{R}$
   (n) $X = R^+ = (0,+\infty)$, $Y = \mathbb{R}$.
2. Udowodnij, że dwa dowolne okręgi są równoliczne.
3. Udowodnij, że jeśli dla pewnych zbiorów A,B,C,D zachodzi $|A| \le |C|$ oraz $|B| \le |D|$, to $|A \cup B| \le |C \cup D|$.
4. Czy prawdą jest, że zawsze jeśli $|A| = |B|$, to $|A \setminus B| = |B \setminus A|$? Odpowiedź uzasadnij.
5. Czy prawdą jest, że zawsze jeśli $|A \setminus B| = |B \setminus A|$, to $|A| = |B|$? Odpowiedź uzasadnij.
6. Rozstrzygnij, czy zbiory są przeliczalne, czy też są mocy continuum:
   (a) zbiór wszystkich punktów płaszczyzny o obu współrzędnych całkowitych,
   (b) zbiór wszystkich punktów płaszczyzny o dokładnie jednej współrzędnej wymiernej,
   (c) zbiór wszystkich przedziałów otwartych na prostej o obu końcach wymiernych,
   (d) dowolny podzbiór płaszczyzny zawierający koło o dodatnim promieniu.
   (e) dowolny okrąg (o dodatnim promieniu).
   (f) zbiór wszystkich prostych na płaszczyźnie.
   (g) zbiór wszystkich punktów na powierzchni sfery o promieniu 1.

1.2 Trochę mniej łatwe niż łatwe

1. Udowodnij, że zbiory X i Y są równoliczne, ustawiając elementy pierwszego z nich w pary z elementami drugiego, tak by wykorzystac wszystkie.
   (a) $X = (0,1]$ (przedział z lewej otwarty, z prawej domknięty), $Y = (0,1)$.
   (b) $X = (0,1), Y = (0,1] \cup \{2,3\}$.
   (c) $X = (1,2), Y = (0,1) \cup (2,3)$.
   (d) $X = (0,1) \cup \mathbb{N}, Y = (0,1)$.
   (e) X – koło o promieniu 1 i środku w punkcie $(0,0)$, $Y = X \setminus \{(0,0)\}$ (to samo koło, ale bez punktu po środku).
   (f) X – koło o promieniu 2 i środku w punkcie $(0,0)$, Y to samo koło ale bez brzegu (bez okręgu o promieniu 2 i środku w $(0,0)$.
2. Udowodnij, że jeśli dla pewnych zbiorów A, B zachodzi $|A| \leq |B|$, to $|P(A)| \leq |P(B)|$.
3. Udowodnij, stosując metodę przekątniową, że następujące zbiory nie są przeliczalne:
   (a) $P(\mathbb{N})$.
   (b) zbiór wszystkich nieskończonych ciągów zero-jedynkowych.
4. Rozstrzygnij, czy zbiory są przeliczalne, czy też są mocy continuum:
   (a) Zbiór wszystkich skończonych podzbiorów liczb naturalnych.
   Wskazówka: Suma przeliczalnej liczby zbiorów przeliczalnych jest przeliczalna.
   (b) Zbiór wszystkich podzbiorów liczb naturalnych, których dopełnienie jest skończone.
   (c) Zbiór wszystkich nieskończonych podzbiorów liczb naturalnych.
   Wskazówka: Dowód nie wprost.
   (d) Zbiór wszystkich nieskończonych podzbiorów liczb naturalnych, których dopełnienie jest nieskończone.
   (e) Zbiór wszystkich ciągów-zerojedynkowych, które od pewnego miejsca mają już tylko zera.
   (f) Zbiór wszystkich okresowych ciągów liczb wymiernych.
   (g) Zbiór wszystkich ciągów liczb naturalnych, które spełniają warunek $a_{n+1} - a_n < \frac{2014}{n+1}$.
5. ! Udowodnij, że istnieje liczba rzeczywista niebędąca pierwiastkiem żadnego równania kwadratowego o wymiernych współczynnikach.
   Wskazówka: Udowodnij, że liczb będących takimi pierwiastkami jest przeliczalnie wiele.
6. Niech A będzie zbiorem przeliczalnym. Wybraliśmy z niego pewną kolekcję jego podzbiorów, ale tak, że żadne dwa wybrane podzbiory się nie przecinają. Udowodnij, że wybraliśmy co najwyżej przeliczalnie wiele podzbiorów.
7. Znajdź funkcję rzeczywistą, taką, że każda wartość rzeczywista jest przyjmowana przez przeliczalnie wiele argumentów.
8. Dowieść, że zbiór funkcji rzeczywistych przyjmujących wartości 0 lub 1 jest równoliczny ze zbiorem wszystkich podzbiorów liczb rzeczywistych.
   Wskazówka: Jak zakodować ciągami zer i jedynek przynależność kolejnych liczb do danego podzbioru zbioru liczb naturalnych?
9. Czy istnieje zbiór A, taki że $|P(A)| = |\mathbb{N}|$? Odpowiedź uzasadnij.
   Wskazówka: Rozpatrz możliwe przypadki.
10. ! Udowodnij, że na płaszczyźnie istnieje okrąg, który nie przechodzi przez żaden punkt o obu współrzędnych wymiernych.
    Wskazówka: Okrąg jest wyznaczony przez środek i punkt, przez który przechodzi.
11. Czy zbiór wszystkich podzbiorów liczb rzeczywistych, do których należy co najwyżej skończenie wiele liczb niewymiernych jest równoliczny ze zbiorem liczb rzeczywistych?
12. Zaproponuj podział zbioru liczb naturalnych na nieskończenie wiele nieskończonych i parami rozłącznych podzbiorów.

1.3 Trudniejsze

1. Udowodnij Tw. Cantora, czyli że żaden zbiór A nie jest równoliczny ze zbiorem wszystkich swoich podzbiorów.
   Wskazówka: Dowód nie wprost. Załóż, że można ustawić w pary zbiór A i jego podzbiory, tak że wszystkie podzbiory są w jakiejś parze. Użyj teraz argumentu przekątniowego konstruując „zły” podzbiór. Uzależnij mianowicie to, czy $a \in A$ należy do „złego” podzbioru od tego, czy nie należy do zbioru stojącego w parze z elementem a. Okaże się, co jest sprzeczne z naszym początkowym założeniem, że „zły” podzbiór nie stoi w żadnej parze.

2. Udowodnij, że nie istnieje zbiór wszystkich zbiorów.
   Wskazówka: Dowód nie wprost. Rozważ zbiór wszystkich elementów tego zbioru, które nie są swoim elementem.

3. Podzbiór X zbioru liczb wymiernych nazwiemy wypukłym, jesli dla każdych $p, q \in X, p < q$ każda liczba wymierna r, taka że $p < r < q$ też należy do X. Ile jest podzbiorów wypukłych liczb wymiernych?

4. Niech dla każdego $i \in \mathbb{N}$, $\langle a_i(n) : n \in \mathbb{N} \rangle$ będzie ciągiem liczb naturalnych. Czyli mamy ciąg ciągów liczb naturalnych. Udowodnij stosując metodę przekątniową, że istnieje ciąg liczb naturalnych g, który z każdym ciągiem a_i pokrywa się na nieskończenie wielu pozycjach.
   Wskazówka: Skorzystaj z podziału skonstruowanego w zad. 12 z serii „trochę mniej łatwe niż łatwe”.

5. Załóżmy, że wybraliśmy pewną kolekcję otwartych przedziałów na prostej rzeczywistej, ale tak, że żadne dwa wybrane przedziały się nie przecinają. Udowodnij, że wybraliśmy co najwyżej przeliczalnie wiele przedziałów.
   Wskazówka: $\mathbb{Q}$.

6. Niech $X \subseteq \mathbb{R}$. Powiemy, że punkt $x \in X$ jest punktem izolowanym, jeśli istnieje przedział otwarty (a, b) taki, że $a < x < b$ oraz $(a, b) \cap X = \{x\}$. Udowodnij, że zbiór punktów izolowanych zbioru X jest co najwyżej przeliczalny.
   Wskazówka: Każdemu punktowi izolowanemu x przyporządkuj taki przedział (p, q) o końcach wymiernych, że $(p, q) \cap X = \{x\}$. Zauważ, że właśnie ustawiliśmy w pary nasze wszystkiw punkty izolowane z przedziałami o końcach wymiernych (niekoniecznie wszystkimi) i skorzystaj z zadania 6c w serii zadań łatwych.