

Zadania

wątek: Kombinatoryka i prawdopodobieństwo — część II

Przede wszystkim dla osób, które miały już rachunek p-stwa w szkole

Projekt „Matematyka dla ciekawych świata”
spisał: Paweł Seta

19 marca 2014

1 Łatwe

1. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród 5 wylosowanych kart:
 - a) będą dokładnie 4 asy,
 - b) będą 3 karty jednego rodzaju i 2 innego,
 - c) będzie 5 kart w jednym kolorze,
 - d) będzie dokładnie dwie pary kart tej samej wysokości,
 - e) będzie się znajdować przynajmniej jedna dama lub przynajmniej jeden pik?
2. Rozwiąż poprzednie zadanie, jeśli losujemy z 2, 3, 4 ... N talii.
3. Pewna firma produkująca żarówki produkuje 0,1% żarówek wadliwych. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród partii 10 żarówek będzie:
 - a) 1 wadliwa?
 - b) 2 wadliwe?
 - c) 10 wadliwych?
4. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród 5 wylosowanych kart będzie 5 kart w kolorze kier, jeśli wiemy, że 2 pierwsze są w kolorze kier ?
5. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w 3 rzutach kostką uzyskamy co najmniej 6 oczek?
6. Z przedziału $[0;1]$ wybieramy losowo 2 punkty, które dzielią go na 3 części. Jaka jest szansa, że ostatni z odcinków będzie najkrótszy?
7. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w dwóch rzutach monetą trafiliśmy reszkę, jeśli wiemy, że trafiliśmy orła?
8. Pewien gracz ma do rozegrania 3 mecze. Może grać z przeciwnikami: słabym-silnym-słabym lub silnym-słabym-silnym. Co mu się bardziej opłaca, jeśli z przeciwnikiem słabym ma 70% szans na wygraną, z silnym – 30% , a musi wygrać 2 kolejne mecze?
9. W urnie jest 20 losów – 5 wygrywających, 5 przegrywających i 10 pozwalających grać dalej. Jaka jest szansa wygranej?
10. Mamy 2 urny. W pierwszej jest 5 kul białych i 2 czarne. W drugiej – 4 kule białe i 3 czarne. Losujemy urnę, po czym wyciągamy z niej kulę
 - a) Jaka jest szansa wylosowania białej kuli?
 - b) Jaka jest szansa, że wylosowaliśmy urnę nr 1, jeśli wylosowana kula była biała?

2 Trochę mniej łatwe, niż łatwe — i już bliskie konkursowi

11. Losujemy 2 liczby z przedziału $[0;1]$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że ich suma będzie większa od 1?
12. Trzej chłopcy rzucają monetą. Najpierw rzuca Adam – jeśli wyrzuci 1, 2 lub 3 wygrywa i gra się kończy. Potem rzuca Bartek. Jeśli wyrzuci 4, 5 lub 6 to on wygrywa. Następnie rzuca Czesiek. Jeśli wyrzuci 2, 5 lub 6 – wygrywa. Jeśli żaden z chłopców nie wygra, zaczynają od początku. Jakie są szanse na wygranie każdego z chłopców?
13. Adam i Bartek rzucają na przemian monetą (zaczyna Adam). Jeśli Adam wyrzuci orła, wygrywa 1 zł. Jeśli Bartek – to on wygrywa 1 zł. Chłopcy grają do pierwszego orła. Jaka jest wartość oczekiwana wygranej Adama?
14. Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrana liczba z $[0;1]$ będzie wymierna? A niewymierna?
15. Pewien człowiek ma 7 przyjaciół. Na ile sposobów może zapraszać 3 z nich przez 7 kolejnych dni tak, aby każdy został zaproszony co najmniej raz?
16. Odsetek kobiet o zielonych oczach jest wyższy w mieście A, niż w mieście B. Odsetek mężczyzn o zielonych oczach również jest wyższy w mieście A, niż w B. Czy jest możliwe, żeby odsetek ludzi o zielonych oczach był wyższy w mieście B? Jeśli tak – podaj przykład, jeśli nie – podaj dowód.
17. W pewnej szkole 64 uczniów uczniów bierze udział w 5 olimpiadach. W każdej olimpiadzie bierze udział co najmniej 19 uczniów. Żaden uczeń nie bierze udziału w więcej, niż 3 olimpiadach. Każde 3 olimpiady mają przynajmniej jednego wspólnego uczestnika. Wykaż, że istnieją 2 olimpiady, które mają co najmniej 5 wspólnych uczestników.
18. Firma z zadania 2 opracowała test, który odpowiada na pytanie, czy żarówka jest wadliwa, czy nie. Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrana żarówka jest wadliwa, jeśli test stwierdził, że jest wadliwa? Jakie jest prawdopodobieństwo, że jest poprawna, jeśli test stwierdził, że jest poprawna jeśli:
 - a) test w 99% daje prawdziwy wynik;
 - b) dla dobrej żarówki test w 90% mówi, że jest dobra, w 10% że zła; dla złej w 100% mówi, że jest zła.
19. To samo zadanie co poprzednio, tylko dla dobrej żarówki test w 95% mówi, że jest dobra, w 5% że zła, natomiast dla złej w 10% mówi, że jest zła, w 90% , że dobra.
20. Wiadomo, że 20% ludzi w Warszawie ma niebieskie oczy. Losujemy 10 osób. Jakie jest prawdopodobieństwo, że dokładnie 4 z nich będą miały niebieskie oczy?

3 Trudniejsze

21. Pewna firma ma maszynę produkcyjną, w której można określić dokładność produkcji liczbą z przedziału $[0; 1]$ (z dokładnością do 0,00001) – przy czym 0 oznacza, że wszystkie wyroby są wadliwe, 1 – wszystkie poprawne, $\frac{1}{2}$ – połowa wyrobów jest poprawna itd. Firma produkuje 100000 sztuk danego towaru. Rząd kupuje od firmy całą partię (po 2,5 zł/szt), po czym każda sztuka jest poddawana testowi. Za każdą sztukę, którą rząd uzna za wadliwą firma płaci karę w wysokości 3 zł. Jaka jest najbardziej korzystna dla firmy dokładność, jeśli koszt produkcji jednej sztuki, w zależności od dokładności, wyraża się funkcją $f(x) = 1 + x$, a test rządowy myli się z prawdopodobieństwem 1% ?
22. Losujemy 2 podzbiory liczb $\{1, 2, 3, \dots, n\}$. Jaka jest szansa, że będą one rozłączne?
23. Pewien klub alpinistyczny liczący n członków organizuje 3 wyprawy wysokogórskie. Na ile sposobów może on wybrać uczestników, jeśli chcemy, żeby każde dwie kolejne wyprawy miały przynajmniej jednego wspólnego uczestnika?
24. W kolejce do kina stoi $2N$ osób. N z nich ma dukata, pozostali mają monetę dwudukatową. W kasie nie ma pieniędzy. Na ile sposobów można ustawić ludzi, aby każdy kupił bilet, który kosztuje dukata?
25. (Banacha) Pewien matematyk nosi przy sobie dwa pudełka zapalek. Ilekroć chce on zapalić papierosa, wyciąga pudełko z losowo wybranej kieszeni. Znajdź prawdopodobieństwo, że w chwili, gdy po raz pierwszy wyciągnie on puste pudełko, drugie będzie zawierało r zapalek, $r = 0, 1, \dots, n$; n jest tu liczbą zapalek, znajdujących się na początku w każdym pudełku.
26. W urnie mamy B kul białych i C kul czarnych. W pojedynczym kroku losujemy kulę, sprawdzamy jej kolor, po czym dorzucamy do urny M kul tego koloru. Jaka jest szansa, że po N krokach wyciągniemy białą kulę?