Kombinowanie o nieskończoności.
4. Jak zmierzyć?

Projekt „Matematyka dla ciekawych świata”
spisał: Michał Korch

19 kwietnia 2018

Trochę rzeczy z wykładu

Prezentacja multimedialna do wykładu.

Nieskończone sumy

Będzie nam się zdarzać potrzebować rozważać nieskończone sumy. Standardowy przykład, to

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots$$

Jest jasne, że wynik tego sumowania to 1. Relatywnie łatwo sumować też tak zwane sumy geometryczne, czyli sumy postaci:

$$a+aq+aq^2+aq^3+\dots,$$

gdzie a to dowolna liczba, a $q<1$. Zauważ, że

$$a+aq=\frac{a(1-q^2)}{1-q}$$

oraz

$$a+aq+aq^2=\frac{a(1-q^3)}{1-q}.$$

Zatem suma pierwszych n wyrazów tej sumy, to

$$a+aq+aq^2+\dots aq^{n-1}=\frac{a(1-q^n)}{1-q}.$$

Skoro $q<1$, to q^n jest coraz bliższe 0, to mamy

$$a+aq+aq^2+aq^3+\dots=\frac{a}{1-q}.$$

Postulaty dotyczące miary

Wprowadziliśmy następujące postulaty dotyczące miary.

1. Odcinek $[a,b]$ (dla $a\le b$) ma długość $b-a$.
2. Przesunięcie zbioru nie zmienia jego długości.
3. Długość sumy skończenie wielu rozłącznych zbiorów jest sumą ich długości.
4. Długość sumy przeliczalnie wielu rozłącznych zbiorów jest sumą (nieskończoną) ich długości.

Infimum

Infimum pewnego zbioru liczb to największa liczba rzeczywista mniejsza równa od wszystkich liczb w tym zbiorze. Na przykład

$$\inf\{1,1/2,1/3,1/4,\dots\}=0.$$

Miara Lebesgue'a

Miara (długość) Lebesgue'a, czyli długość zbioru na prostej to infimum wszystkich miar (sum długości odcinków) pokryć tego zbioru przeliczalną liczbą odcinków.

Na przykład, miara zbioru Cantora, który powstaje z odcinka przez iteracyjne nieskończone powtarzanie kroków: usuwamy środkową jedną trzecią z każdego odcinka, wynosi zero. Rzeczywiście, możemy go pokryć odcinkiem o długości 1, możemy go pokryć dwoma odcinkami o długości 1/3, czterema odcinkami o długości 1/9, itd., ale

$$\inf\{1, 2/3, 4/9, \ldots\} = 0.$$

Zbiory niemierzalne

Pokazaliśmy, że założenie, że można zmierzyć każdy zbiór jest nieco na wyrost – przy założeniu aksjomatu wyboru, możemy zauważyć, że istnienie miary dla pewnych zbiorów prowadzi do sprzeczności z założonymi przez nas postulatami. Jeśli jednak weźmiemy pod uwagę tylko takie zbiory A, że dla każdego zbioru E, $m(E) = m(A \cap E) + m(E \setminus A)$, to dla tych zbiorów wszystkie nasze postulaty są spełnione. Te zbiory nazywane są mierzalnymi.

Pole i całka

Analogicznie do długości zbiorów na prostej możemy liczyć pola powierzchni skomplikowanych figur. Tym razem zamiast pokryć odcinkami, będę pokrywać prostokątami. Czyli pole obszaru to infimum wszystkich pól powierzchni pokryć tego zbioru przeliczalną liczbą prostokątów.

Całką $\int_a^b f(x)\,dx$ nazywamy pole pod wykresem danej funkcji f między zadanymi punktami (a, b), np.

$$\int_0^2 x\,dx = 2,$$

ponieważ obszar pod wykresem $y = x$ od punktu $x = 0$ do punktu $x = 2$ to równoramienny trójkąt prostokątny o boku (i wysokości) 2, pole tego trójkąta to $2 \cdot 2/2 = 2$.

Bardzo często pola pod wykresami funkcji (zgodnie z definicją pola podaną wyżej) będziemy liczyć przybliżając je prostokątnymi cienkimi słupkami.

1 Łatwe

1. Policz następujące nieskończone sumy:
   a) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots$
   b) $3 + 2 + 1\frac{1}{3} + \frac{8}{9} + \ldots$
   c) $2014 + 212 + 22\frac{6}{19} + \ldots$
   d) $6 + 4 + 3 + 2 + 1\frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \ldots$
   e) $6 - 4 + 3 - 2 + 1\frac{1}{2} - 1 + \frac{3}{4} - \frac{1}{2} + \ldots$
2. Policz następujące nieskończone sumy:
   a) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots$
   b) $1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} + \ldots$
   c) $1 + \sqrt{2} + 2 + \ldots$
3. Spróbujmy zsumować szereg
   $$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$
   Mamy $(1 - 1) + (1 - 1) + \ldots = 0$, jednocześnie $1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \ldots = 1$. Ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego mamy: $S = \frac{1}{2}$. Który wynik jest prawdziwy? Jakie wnioski możesz wyciągnąć z tego zadania?
4. Jakie jest infimum następujących zbiorów. Który z nich ma minimum (najmniejszy element)?
   a) $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$,

b) $(0,1)$,

c) $[0,1]$,

d) R,

e) $\{-1,-4,-9,\dots\}$,

f) długości odcinków $[1-\frac{1}{n}, 5+\frac{1}{n}]$,

g) pól prostokątów o bokach długości 1, $\frac{1}{n}$,

h) pól prostokątów o bokach długości n, $\frac{2}{n}$,

i) pól prostokątów o bokach długości n, $\frac{1}{n^2}$,

j) pól prostokątów o bokach długości 2^n, $\frac{1}{n}$,

k) wyrazów ciągu $a_n = (\sqrt{2})^n$,

l) wyrazów ciągu $a_n = (\frac{\sqrt{2}}{2})^n$.

5. Dyzio zaczął chodzić na zajęcia dla Ciekawych Świata. Po pierwszym trzech zajęciach doszedł do wniosku, że pola wszystkich trójkątów sa równe 0. Każdy z nich jest bowiem zbudowany z tej samej ilości odcinków o takim samym polu. Równym oczywiście 0. Określ dwa błędy, które popełnił Dyzio.

6. Przypomnij, dlaczego zbiory: liczb naturalnych i liczb wymiernych mają miarę 0.

7. Oblicz miarę zbioru wszystkich liczb niewymiernych.

8. Oblicz miarę zbioru $[1, 1\frac{1}{2}] \cup [2, 2\frac{1}{2^2}] \cup [3, 3\frac{1}{2^3}] \cup [4, 4\frac{1}{2^4}] \cup \dots$.
Wskazówka: Zsumuj odpowiedni szereg.

9. Oblicz $\int_a^b f(x)\,dx$, czyli pole pod wykresem funkcji $y = f(x)$ między $x = a$ oraz $x = b$ (przypisz znak ujemny polu poniżej osi X), dla:

   a) $y = x,\ a = 1, b = 3$,

   b) $y = 2x + 1,\ a = 0, b = 5$,

   c) $y = x,\ a = -2018, b = 2018$,

   d) $y = |x|,\ a = -1, b = 1$.

10. Naszkicuj na kartce w kratkę wykres funkcji $y = x^3$ i następnie oszacuj $\int_0^3 x^3\,dx$ (pole pod wykresem) licząc:

   a) pola odpowiednich prostokątnych słupków ograniczających wykres od góry,

   b) pola odpowiednich prostokątnych słupków ograniczających wykres od dołu,

   c) przybliżając wykres funkcji łamaną i licząc pola słupków w kształcie trapezów,

   d) pola odpowiednich prostokątnych słupków ograniczających wykres od góry, ale dwa razy cieńszych niż w pierwszym podpunkcie.

2 Trochę mniej łatwe niż łatwe

1. Wielomianem nazywamy wyrażenie takie jak $2x^2 + 3x - 5$, albo $10x^3 - 4x^2 + x + 10$. Wielomiany można zapisywać w różnych postaciach:

   - potęgowej: np. $4x^3 + 3x^2 - 2x + 5$,
   - postaci Hornera: $5 + x(-2 + x(3 + 4x))$,
   - postaci Newtona dla punktów $x = 0, 1, 2$: $5 + 5(x - 0) + 15(x - 0)(x - 1) + 4(x - 0)(x - 1)(x - 2)$.

   Sprawdź, licząc wartość dla $x = 0, 1, 2, 3$, że przykłady wielomianu w tych trzech postaciach to tak naprawdę ten sam wielomian. Licząc zwróć szczególną uwagę na postać Newtona – zauważ, że jest zapisany tak, żeby relatywnie łatwo było wyliczyć jego wartość w punktach $0, 1$ oraz 2.

2. Zapisz wielomian

a) w postaci potęgowej i w postaci Hornera, jeśli ten wielomian jest dany w postaci Newtona dla punktów $-1, 1$ i jest to $2 + (x - (-1)) - 3(x - (-1))(x - 1)$,
Wskazówka: Zauważ, że żeby otrzymać postać potęgową, wystarczy wymnożyć i uporządkować wyrazy w postaci Netwona, natomiast przejście z postaci potęgowej do postaci Hornera jest prawie automatyczne.

b) w postaci Hornera i w postaci Netwona dla punktów $-2, 1$, jeśli ten wielomian jest dany w postaci potęgowej jako $x^2 - x + 2$.
Wskazówka: Zatem w postaci Netwona dla punktów $-2, 1$ będzie to $a + b(x - (-2)) + c(x - (-2))(x - 1)$. Zacznij od wyliczenia a wyliczając wartość danego wydarzenia dla $x = -2$, potem wylicz b korzystając z wartości dla $x = 1$. Na koniec wylicz c wyliczając wartość wielomianu dla dowolnego innego x, np. $x = 0$.

c) w postaci potęgowej i w postaci Newtona dla punktów $-1, 0, 1$, jeśli ten wielomian dany jest w postaci Hornera jako $1 + x(1 + x(-1 + 2x))$.

3. Oblicz miarę zbioru wszystkich liczb będących pierwiastkiem jakiegoś równania kwadratowego o wymiernych współczynnikach.
Wskazówka: Jak bardzo nieskończenie wiele elementów ma ten zbiór?

4. Oblicz miarę zbioru skonstruowanego tak, jak zbiór Cantora, ale z wycinaniem środkowej $\frac{1}{4}$ odcinków, zamiast środkowej $\frac{1}{3}$.
Wskazówka: Postępuj podobnie jak w przypadku zbioru Cantora, czyli policz miary kolejnych coraz dokładniejszych pokryć.

5. Niech $A_1, A_2, \ldots$ będą zbiorami miary zero (niekoniecznie rozłącznymi). Udowodnij, korzystając z jednego z naszych postulatów dotyczących miary, że ich suma teoriomnogościowa $\bigcup_{n>0} A_n$ też jest miary zero.

6. Niech x będzie liczbą rzeczywistą. Wykaż (korzystając tylko z definicji miary Lebesgue'a), że $m(\{x\}) = 0$.

7. Niech $A, B \subseteq [0, 1]$ będą zbiorami mierzalnymi. Udowodnij, że jeśli $m(A) + m(B) > 1$, to $A \cap B \neq \varnothing$.
Wskazówka: Na przykład dowód nie wprost.

8. Oblicz miarę zbioru $[2, 2\frac{1}{2}] \cup [3, 3\frac{1}{3}] \cup [4, 4\frac{1}{4}] \cup [5, 5\frac{1}{5}] \ldots$.
Wskazówka: Oczywiście trzeba spróbować zsumować odpowiedni szereg. Nie jest to niestety szereg geometryczny, więc zadanie jest utrudnione. Aby spróbować go policzyć zblokuj kolejne wyrazy: pierwszy sam, drugi z trzecim, czwarty do siódmego, itd. Porównaj każdy blok z liczbą $\frac{1}{2}$.

9. Oblicz miarę zbioru Smitha-Volterra-Cantora, który konstruowany jest następująco: z odcinka $[0, 1]$ usuwamy środkowy odcinek o długości $\frac{1}{4}$. Z powstałych 2 odcinków usuwamy ich środkowe fragmenty o długości $\frac{1}{16}$, itd., czyli w kroku, w którym mamy 2^n odcinków usuwamy z każdego z nich środkowy fragment o długości $\frac{1}{2^{2n+2}}$.

10. Niech $A_1, A_2, \ldots$ będą zbiorami miary zero (niekoniecznie rozłącznymi). Udowodnij, nie korzystając z naszego postulatu, a tylko z definicji miary Lebesgue'a, że ich suma teoriomnogościowa $\bigcup_{n>0} A_n$ też jest miary zero.
Wskazówka: Skonstruuj pokrycie całej sumy, biorąc coraz mniejsze pokrycia poszczególnych zbiorów. Np. jeśli wezmę pokrycie A_1 długości $\frac{1}{2}$, A_2 długości $\frac{1}{4}$ itd. suma tych pokryć pokryje sumę wszystkich zbiorów i będzie miała długość nie większą niż 1. Postępuj podobnie by pokryć sumę pokryciem nie dłuższym niż $\frac{1}{2}$, potem $\frac{1}{4}$, itd. Infimum tych długości to 0.

11. Oblicz pole trójkąta Sierpińskiego. Trójkąt Sierpińskiego otrzymuje się następująco: w trójkącie równobocznym łączy się środki boków, dzieląc go w ten sposób na cztery mniejsze trójkąty. Trójkąt środkowy usuwa się, a wobec trzech pozostałych trójkątów operację się powtarza, dzieląc każdy z nich na cztery mniejsze trójkąty, usuwając środkowy, a wobec pozostałych czynności się powtarzają. Punkty pozostające po nieskończenie wielu powtórzeniach tej operacji tworzą trójkąt Sierpińskiego.
Wskazówka: Jest intuicyjne i daje dobry wynik pokrywanie tego zbioru trójkątami, a nie prostokątami. Niestety, rozumując tak, nie korzystamy z definicji, a z faktu, który nie został zaprezentowany. Takie rozwiązanie jest więc dobre, ale nie idealne w naszym stanie wiedzy. Aby ominąć tę trudność (i sporządzić bardzo dobre rozwiązanie), warto zauważyć, że trójkąt Sierpińskiego nie zmieni pola, jeśli będzie trójkątem prostokątnym o odpowiednich bokach. I rozważyć równocześnie dwa takie trójkąty.

12. Niech A będzie mierzalnym podzbiorem odcinka $[0, 1]$, takim, że $m(A) > 0$ oraz a pewną liczbą rzeczywistą, taką że $0 < a < 1$. Udowodnij, że istnieje przedział I, taki że $m(A \cap I) \geq a \cdot m(I)$.

13. Udowodnij, korzystając z odpowiedniego naszego postulatu dotyczącego miary, że jeśli A, B są zbiorami mierzalnymi, to $m(A) + m(B) = m(A \cup B) + m(A \cap B)$.

14. Niech A będzie zbiorem mierzalnym oraz B będzie zbiorem miary zero. Udowodnij, że $m(A \setminus B) = m(A \cup B) = m(A)$.

15. Skonstruuj taki zbiór $A \subseteq [0,1]$, aby ten zbiór był „dziurawy", tzn. w każdy przedziale (p,q) dla $0 < p < q < 1$ istnieje $x \in (p,q) \setminus A$ oraz $m(A) = \frac{2}{3}$.

16. Wiedząc, że:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n} \qquad \xrightarrow{n \to \infty} \qquad \ln 2$$

oblicz pole obszaru ograniczonego prostymi $y = 0, x = 0, x = 1$ oraz krzywą $y = \frac{1}{1+x}$.
Wskazówka: Postępuj podobnie jak w przypadku pola pod parabolą, które policzyliśmy na wykładzie

17. Oblicz $\int_a^b f(x)\,dx$, czyli pole pod wykresem funkcji $y = f(x)$ między $x = a$ oraz $x = b$ (przypisz znak ujemny polu poniżej osi X), dla:

a) $y = \sin x$, $a = -90°, b = 90°$,

b) $y = 1/x^3$, $a = -1, b = 1$.

3 Trudniejsze

1. Jaka jest moc zbioru wszystkich podzbiorów prostej o mierze 0?
Wskazówka: Pomyśl na przykład o podzbiorach zbioru Cantora.

2. Czy istnieje taki podzbiór A prostej rzeczywistej, taki że $m(A) = \frac{1}{2}$ oraz $\mathbb{Q} \subseteq A$?
Wskazówka: Ustaw liczby wymierne w ciąg (można, bo są przeliczalne) a następnie weź wokół kolejnych liczb coraz mniejsze odcinki.

3. Niech A będzie zbiorem leżącym na prostej, takim że $m(A) > 0$. Udowodnij, że istnieje taka liczba $\varepsilon > 0$, że dla każdego $r \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ istnieją punkty $x, y \in A$, takie że $x - y = r$.

4. Udowodnij, że pole koła o promieniu r wynosi πr^2, wiedząc, że obwód tego koła wynosi $2\pi r$.
Wskazówka: Przybliż koło trójkątami.