Kombinowanie o nieskończoności.
3. Jak policzyć nieskończone
materiały do ćwiczeń

Projekt „Matematyka dla ciekawych świata”
spisał: Michał Korch

22 marzec 2018

Szybkie przypomnienie z wykładu

Prezentacja multimedialna do wykładu.

Operacje na zbiorach i oznaczenia

Zbiór składa się z elementów, 0 jest elementem zbioru $A = \{0, 1, 2, 3\}$, co oznaczamy $0 \in A$. W zbiorze nie ma czegoś takiego, jak liczność elementów, czyli np. $\{0, 0\} = \{0\}$.

Podzbiór zbioru A to zbiór do którego należy część (może zero, a może wszystkie) elementy zbioru A. Na przykład $\{0, 1\} \subseteq \{0, 1, 2, 3\}$. W szczególności zbiór pusty jest podzbiorem każdego zbioru $\varnothing \subseteq A$ oraz zawsze $A \subseteq A$. Zbiór wszystkich podzbiorów zbioru A oznaczamy jako $\mathcal{P}(A)$, czyli na przykład $\mathcal{P}(\{0, 1\}) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$.

$A \cup B$ to suma tych dwóch zbiorów (zbiór, który ma wszystkie elementy A oraz wszystkie elementy B). $A \cap B$ to przecięcie tych dwóch zbiorów (zbiór, który ma wszystkie elementy będące zarówno elementami A, jak i B). $A \setminus B$ to różnica tych dwóch zbiorów (zbiór, który ma wszystkie elementy A, które nie są elementami zbioru B). $A \triangle B$ oznacza różnicę symetryczną, czyli $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Hotel Hilberta i równoliczność

Hotel Hilberta ma nieskończenie wiele jednomiejscowych pokoi ponumerowanych liczbami naturalnymi: $0, 1, 2, 3, \ldots$

Dwa zbiory są równoliczne ($|A| = |B|$), jeśli można elementy jednego z nich ustawić w pary z elementami drugiego zbioru, tak że każdy element obu zbiorów został ustawiony w jakiejś parze.

Zbiory równoliczne ze zbiorem liczb naturalnych (czyli takie, które da się zakwaterować w hotelu Hilberta) nazywamy zbiorami przeliczalnymi. Udowodniliśmy, że zbiór liczb całkowitych, zbiór par liczb naturalnych oraz zbiór liczb wymiernych są przeliczalne.

Zbiory równoliczne ze zbiorem liczb rzeczywistych nazywamy zbiorami mocy kontinuum. Powiedzieliśmy sobie, że $[0, 1]$, zbiór wszystkich nieskończonych ciągów zero-jedynkowych oraz $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ są takiej mocy. Udowodniliśmy także, że jest to moc większa od zbioru liczb naturalnych.

Twierdzenie Cantora mówi, że dla każdego zbioru $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.

1 Zadania łatwe

1. Niech $A = \{1, 2, 3, 4\}$ oraz $B = \{1, 3, 5, 7\}$. Oblicz: $A \cup B, B \cap A, A \setminus B, B \setminus A$ oraz $\mathcal{P}(A)$.

2. Ile jest podzbiorów zbioru n-elementowego?

3. Rozstrzygnij, czy zawsze $A \setminus B \cup B = A$.

4. Naszkicuj na układzie współrzędnych zbiory $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ oraz $A \triangle B$ ($\triangle$ oznacza różnicę symetryczną, czyli $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$), jeśli:

   a) A to kwadrat o wierzchołkach w punktach $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, -1), (-1, 1)$, B to koło o środku w punkcie $(2, 0)$ i promieniu 2,

   b) A to półpłaszczyzna określona przez $x \geqslant 0$, a B to zbiór ograniczony prostymi $y = -2$ i $y = 1$, dokładniej $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon -2 < y < 1\}$,

   c) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x + y \leqslant 1\}, B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon |y| < 1\}$,

   d) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon |x + y| \leqslant 1\}, B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon |y| < 1\}$,

   e) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon |x| + |y| \leqslant 1\}, B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x - 1)^2 + (y - 1)^2 < 1\}$.

5. Udowodnij (rysując diagramy z kółkami), że dla dowolnych zbiorów A, B, C:

   a) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

   b) $A \cup B = A \triangle B \triangle (A \cap B)$

   c) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$

6. Udowodnij, że dla każdych dwóch zbiorów A i B, $A = B$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$.

7. Jak w hotelu Hilberta (pokoje numerowane od zera) zakwaterować elementy następujących zbiorów?

   a) $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

   b) $\mathbb{N} \cup \{\pi\}$

   c) $\mathbb{N} \setminus \{2018\}$

   d) zbiór liczb parzystych.

8. Udowodnij, że dwa dowolne okręgi są równoliczne.

9. Udowodnij, że jeśli dla pewnych zbiorów rozłącznych A, B, C, D zachodzi $|A| \leqslant |C|$ oraz $|B| \leqslant |D|$, to $|A \cup B| \leqslant |C \cup D|$.

10. Jak w hotelu Hilberta (pokoje numerowane od zera) zakwaterować elementy następujących zbiorów?

    a) $\{\frac{1}{n+1} \colon n \in \mathbb{N}\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$.

    b) $\{\frac{1}{n+1} \colon n \in \mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$.

11. Udowodnij, że zbiory X i Y są równoliczne, ustawiając elementy pierwszego z nich w pary z elementami drugiego, tak by wykorzystać wszystkie.

a) $X = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}, Y = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$.

b) $X = \mathbb{N}, Y = \mathbb{N} \setminus \{2018\}$.

c) $X = \mathbb{N} \cup \{\pi\}, Y = \mathbb{N}$.

d) X – zbiór liczb parzystych, $Y = \mathbb{N}$.

e) $X = \mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}, Y = \mathbb{N}$.

f) $X = \mathbb{N} \cup \{\pi, 2\pi\}, Y = \mathbb{N}$.

2 Zadania trochę mniej łatwe niż łatwe

1. Wskaż wszystkie elementy i podzbiory każdego z następujących zbiorów:

   a) $\{0, 1, 2\}$

   b) $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$,
   Wskazówka: Jest podobnie jak w poprzednim podpunkcie!

   c) $\{\mathbb{N}, \{\mathbb{N}\}\}$,

   d) $\{\varnothing, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \setminus \{\varnothing\}, \{\varnothing\} \cap \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$.

2. Matematycy definiując formalnie liczby naturalne utożsamiają zero ze zbiorem pustym (ozn. $\varnothing$), a liczbę naturalną n (dla $n > 0$) definiują jako zbiór wszystkich liczb od niej mniejszych ($n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$). Zatem $0 = \varnothing, 1 = \{0\} = \{\varnothing\}, 2 = \{0, 1\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$. Wypisz w ten sposób liczbę 4.
   Wskazówka: $3 = \{0, 1, 2\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$.

3. Czy prawdą jest, że zawsze jeśli $|A| = |B|$, to $|A \setminus B| = |B \setminus A|$? Odpowiedź uzasadnij.

4. Czy prawdą jest, że zawsze jeśli $|A \setminus B| = |B \setminus A|$, to $|A| = |B|$? Odpowiedź uzasadnij.

5. Udowodnij, że zbiory X i Y są równoliczne, ustawiając elementy pierwszego z nich w pary z elementami drugiego, tak by wykorzystać wszystkie.

   a) $X = (-1, 1)$ (przedział otwarty), $Y = (2, 4)$.

   b) $X = (0, 1), Y = (0, 4)$.

   c) X – okrąg o promieniu 1 i środku w punkcie $(0, 0)$, Y – okrąg o promieniu 2 i środku w punkcie $(0, 0)$

   d) X – koło o promieniu 3 i środku w punkcie $(-1, 1)$, Y – koło o promieniu 1 i środku w punkcie $(1, -1)$

   e) X i Y to dwa dowolne, różne od siebie kwadraty.

   f) X to prostokat o bokach długości 3 i 5, Y to prostokąt o bokach długości 2 i 8.
   Wskazówka: Może przydać się jeszcze jeden, pośredni prostokąt.

   g) $X = R^+ = (0, +\infty)$, $Y = \mathbb{R}$.

6. Udowodnij, że zbiory X i Y są równoliczne, ustawiając elementy pierwszego z nich w pary z elementami drugiego, tak by wykorzystać wszystkie.

   (a) $X = (0, 1]$ (przedział z lewej otwarty, z prawej domknięty), $Y = (0, 1)$.
   Wskazówka: Zmień ustawienie przeliczalnie wielu punktów, zaczynając oczywiście od 1.

(b) $X = (0,1), Y = (0,1] \cup \{2,3\}$.

(c) $X = (1,2), Y = (0,1) \cup (2,3)$.

(d) $X = (0,1) \cup \mathbb{N}, Y = (0,1)$.

(e) X – koło o promieniu 1 i środku w punkcie $(0,0)$, $Y = X \setminus \{(0,0)\}$ (to samo koło, ale bez punktu po środku).

(f) X – koło o promieniu 2 i środku w punkcie $(0,0)$, Y to samo koło ale bez brzegu (bez okręgu o promieniu 2 i środku w $(0,0)$.

7. Udowodnij, że istnieje liczba rzeczywista niebędąca pierwiastkiem żadnego równania kwadratowego o wymiernych współczynnikach.
   Wskazówka: Udowodnij, że liczb będących takimi pierwiastkami jest przeliczalnie wiele.

8. Niech A będzie zbiorem przeliczalnym. Wybraliśmy z niego pewną kolekcję jego podzbiorów, ale tak, że żadne dwa wybrane podzbiory się nie przecinają. Udowodnij, że wybraliśmy co najwyżej przeliczalnie wiele podzbiorów.

9. Znajdź funkcję rzeczywistą, taką, że każda wartość rzeczywista jest przyjmowana przez przeliczalnie wiele argumentów.

10. Dowieść, że zbiór funkcji rzeczywistych przyjmujących wartości 0 lub 1 jest równoliczny ze zbiorem wszystkich podzbiorów liczb rzeczywistych.
    Wskazówka: Jak zakodować ciągami zer i jedynek przynależność kolejnych liczb do danego podzbioru zbioru liczb naturalnych?

11. Czy istnieje zbiór A, taki że $|P(A)| = |\mathbb{N}|$? Odpowiedź uzasadnij.
    Wskazówka: Rozpatrz możliwe przypadki.

12. Udowodnij, że na płaszczyźnie istnieje okrąg, który nie przechodzi przez żaden punkt o obu współrzędnych wymiernych.
    Wskazówka: Okrąg jest wyznaczony przez środek i punkt, przez który przechodzi.

13. Czy zbiór wszystkich podzbiorów liczb rzeczywistych, do których należy co najwyżej skończenie wiele liczb niewymiernych jest równoliczny ze zbiorem liczb rzeczywistych?

14. Zaproponuj podział zbioru liczb naturalnych na nieskończenie wiele nieskończonych i parami rozłącznych podzbiorów.

3 Zadania trudniejsze

1. Rozstrzygnij, czy zbiory są przeliczalne, czy też są mocy continuum:

   a) zbiór wszystkich punktów płaszczyzny o obu współrzędnych całkowitych,

   b) zbiór wszystkich przedziałów otwartych na prostej o obu końcach wymiernych,

2. Rozstrzygnij, czy zbiory są przeliczalne, czy też są mocy continuum:

   a) Zbiór wszystkich skończonych podzbiorów liczb naturalnych.
      Wskazówka: Suma przeliczalnej liczby zbiorów przeliczalnych jest przeliczalna.

   b) Zbiór wszystkich podzbiorów liczb naturalnych, których dopełnienie jest skończone.

c) Zbiór wszystkich nieskończonych podzbiorów liczb naturalnych.
Wskazówka: Dowód nie wprost.

d) Zbiór wszystkich nieskończonych podzbiorów liczb naturalnych, których dopełnienie jest nieskończone.

3. Rozstrzygnij, czy zbiory są przeliczalne, czy też są mocy continuum:

   a) Zbiór wszystkich ciągów zerojedynkowych, które od pewnego miejsca mają już tylko zera.

   b) Zbiór wszystkich okresowych ciągów liczb wymiernych.

   c) Zbiór wszystkich ciągów liczb naturalnych, które spełniają warunek $a_{n+1} - a_n < \frac{2018}{n+1}$.

4. Udowodnij, że zbiory X i Y są równoliczne, ustawiając elementy pierwszego z nich w pary z elementami drugiego, tak by wykorzystać wszystkie.

   a) $X = (0, 1]$ (przedział z lewej otwarty, z prawej domknięty), $Y = (0, 1)$.
   Wskazówka: Zbiory $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$ oraz $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$ są równoliczne.

   b) $X = (0, 1), Y = (0, 1] \cup \{2, 3\}$.

5. Udowodnij Tw. Cantora, czyli że żaden zbiór A nie jest równoliczny ze zbiorem wszystkich swoich podzbiorów.
Wskazówka: Dowód nie wprost. Załóż, że można ustawić w pary zbiór A i jego podzbiory, tak że wszystkie podzbiory są w jakiejś parze. Użyj teraz argumentu przekątniowego konstruując na złość „zły” podzbiór. Uzależnij mianowicie to, czy $a \in A$ należy do „złego” podzbioru od tego, czy nie należy do zbioru stojącego w parze z elementem a. Okaże się, co jest sprzeczne z naszym początkowym założeniem, że „zły” podzbiór nie stoi w żadnej parze.

6. Udowodnij, że nie istnieje zbiór wszystkich zbiorów.
Wskazówka: Dowód nie wprost. Rozważ zbiór wszystkich elementów tego zbioru, które nie są swoim elementem.

7. Podzbiór X zbioru liczb wymiernych nazwiemy wypukłym, jeśli dla każdych $p, q \in X, p < q$ każda liczba wymierna r, taka że $p < r < q$ też należy do X. Ile jest podzbiorów wypukłych liczb wymiernych?

8. Niech dla każdego $i \in \mathbb{N}$, $\langle a_i(n) : n \in \mathbb{N} \rangle$ będzie ciągiem liczb naturalnych. Czyli mamy ciąg ciągów liczb naturalnych. Udowodnij stosując metodę przekątniową, że istnieje ciąg liczb naturalnych g, który z każdym ciągiem a_i pokrywa się na nieskończenie wielu pozycjach.
Wskazówka: Skorzystaj z podziału skonstruowanego w zad. 14 z serii „trochę mniej łatwe niż łatwe”.

9. Załóżmy, że wybraliśmy pewną kolekcję otwartych przedziałów na prostej rzeczywistej, ale tak, że żadne dwa wybrane przedziały się nie przecinają. Udowodnij, że wybraliśmy co najwyżej przeliczalnie wiele przedziałów.
Wskazówka: $\mathbb{Q}$.

10. Niech $X \subseteq \mathbb{R}$. Powiemy, że punkt $x \in X$ jest punktem izolowanym, jeśli istnieje przedział otwarty (a, b) taki, że $a < x < b$ oraz $(a, b) \cap X = \{x\}$. Udowodnij, że zbiór punktów izolowanych zbioru X jest co najwyżej przeliczalny.

Wskazówka: Każdemu punktowi izolowanemu x przyporządkuj taki przedział (p,q) o końcach wymiernych, że $(p,q) \cap X = \{x\}$. Zauważ, że właśnie ustawiliśmy w pary nasze wszystkie punkty izolowane z przedziałami o końcach wymiernych (niekoniecznie wszystkimi) i skorzystaj z zadania 1b w serii zadań łatwych.