Matematyka dla Ciekawych Świata, 2012/2013

Laboratorium 5 — Równania Różniczkowe

1*. Długość łuku paraboli. Korzystając z jednej z procedur całkowania numerycznego napisanych na poprzednich zajęciach (np. `calkuj_prostokatami`), wylicz długość łuku L dla funkcji parabolicznej

$$f(x) = x^2 \tag{1}$$

w przedziale od $x_1 = -1$ do $x_2 = 1$. Skorzystaj ze wzoru:

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx. \tag{2}$$

2. Animacja fali biegnącej.** Napisz program, który wyświetli animację ruchu fali biegnącej na strunie. Równanie fali biegnącej można zapisać jako

$$g(x,t) = \sin(x - t). \tag{3}$$

Wzór ten opisuje wychylenie struny w położeniu x i w chwili czasu t. Kolejne klatki animacji otrzymasz rysując wykresy $g(x, 0)$ (pierwsza klatka), $g(x, \Delta t)$ (druga klatka), $g(x, 2\Delta t)$ (trzecia klatka) itd. W każdej klatce animacji rysuj wykres dla $x \in [0, 4\pi]$. Przedział czasowy wybierz jako $t \in [0, 15]$ z krokiem czasowym między kolejnymi klatkami animacji $\Delta t = 0.1$.

3*. Animacje fal — ciąg dalszy. Zmodyfikuj swój program z zadania poprzedniego tak, aby wyświetlał

a) falę biegnąca w przeciwnym kierunku niż dana równaniem (3)

$$h(x,t) = \sin(x + t), \tag{4}$$

b) falę stojącą będącą złożeniem fal biegnących w przeciwnych kierunkach

$$w(x,t) = g(x,t) + h(x,t) = \sin(x - t) + \sin(x + t). \tag{5}$$

Porównaj zachowanie fal we wszystkich trzech przypadkach.

4. Równanie różniczkowe dla wahadła. Modelem matematycznym opisującym w przybliżeniu ruch wahadła jest *układ równań różniczkowych*:

$$\begin{aligned} r'(t) &= v(t) \qquad (6) \\ v'(t) &= -k\, r(t). \end{aligned}$$

Niewiadomymi w powyższym układzie równań są funkcje — $r(t)$, która jest związana z położeniem wahadła i funkcja $v(t)$, która oznacza jego prędkość. Symbol k jest parametrem liczbowym. Powyższe równania można rozwiązać w sposób przybliżony tzw. *metodą Eulera*:

$$\begin{aligned} r(t+\Delta t) &\approx r(t) + v(t)\,\Delta t \\ v(t+\Delta t) &\approx v(t) - k\,r(t)\,\Delta t. \end{aligned} \tag{7}$$

Po uruchomieniu "w pętli", metoda ta pozwala policzyć wartości funkcji położenia i prędkości w kolejnych punktach siatki czasowej (tzn. $r(\Delta t)$ i $v(\Delta t)$, $r(2\Delta t)$ i $v(2\Delta t)$, itd.) o ile tylko znane są wartości początkowe $x(0)$ i $v(0)$.

Napisz program, który rozwiąże układ równań dla wahadła metodą Eulera. Przyjmij $x(0) = 0$, a $v(0) = 0$, wartość stałej $k = 1.0$. Za krok czasowy przyjmij $\Delta t = 0.01$ i wykonaj $N = 1000$ kroków symulacji.

5. **Porównanie z rozwiązaniem analitycznym.** Rozwiązaniem analitycznym dla równań (6) z warunkami początkowymi $x(0) = 0$, a $v(0) = 1$, jest

$$\begin{aligned} r(t) &= \sin(t), \\ v(t) &= \cos(t). \end{aligned} \tag{8}$$

Porównaj otrzymane przez Ciebie rozwiązanie przybliżone z rozwiązaniem dokładnym dla kilku kroków czasowych $\Delta t = 0.1$, $\Delta t = 0.01$ i $\Delta t = 0.001$.

6. **Animacja ruchu wahadła.** Korzystając z wyników numerycznego rozwiązania modelu wahadła przygotuj animację jego ruchu. Zmienna r ma interpretację kąta wychylenia wahadła z położenia równowagi. Załóż, że linka wahadła jest zaczepiona w punkcie (0,1) i ma długość 1. Korzystając z tych informacji wyznacz położenie końca wahadła x i y, następnie narysuj linkę wahadła dla kolejnych wartości r. Korzystając ze wskazówek prowadzącego udoskonal swój program.

7. **Animacja ruchu wahadła — prędkość.**** Do swojego programu animującego ruch wahadła dodaj rysowanie strzałki symbolizującej wektor prędkości. Wektor prędkości ma kierunek styczny do toru (czyli prostopadły do linki wahadła) i wartość v obliczoną w trakcie rozwiązywania modelu wahadła.

   Wskazówka 1. Strzałkę od punktu o współrzędnych `x1`, `y1` do punktu o współrzędnych `x2`, `y2` narysujesz przy pomocy `xarrows([x1, x2], [y1,y2])`.

   Wskazówka 2. Dla lepszego zobrazowania wartości prędkości przeskaluj długość rysowanej strzałki o czynnik 0.3.