Quiz Rozumowania i Absurdu (πQRA)

na podstawie W. Lietzmanna "Gdzie tkwi błąd?" PZWS 1958

Na start. Ktoś kupuje u kupca towar za 60 złotych, płacąc banknotem stuzłotowym. Kupiec nie ma reszty, rozmienia banknot u sąsiada i wydaje 40 zł reszty. Następnego dnia sąsiad odnosi banknot, bo jest podrobiony. Kupiec, który dał już kupującemu 40 zł, musi jeszcze chcąc nie chcąc wypłacić sąsiadowi 100 zł. Ile stracił?

A. Rozgrzewka. Sformułuj, na czym polega błąd i wyciągnij wniosek. (Wniosek może Ci już być skąd inąd znany).

1. Z podręcznika geografii:
   (a) W dniu 21 marca Słońce stoi dokładnie nad środkiem kuli ziemskiej.
   (b) Na każdej poruszającej się kuli dwa punkty muszą pozostawać w spoczynku i takie punkty nazywamy na kuli ziemskiej biegunami.
2. Udowodnimy, że $1 = -1$. Niech $x = 1$, wtedy również $x^2 = 1$, czyli
   $$x^2 - 1 = 0.$$
   Stosujemy wzór skróconego mnożenia:
   $$(x+1)(x-1) = 0.$$
   Dzieląc przez $x - 1$, otrzymujemy
   $$x + 1 = 0,$$
   czyli $x = -1$.
3. Dane jest równanie
   $$(x+1)^2 - (x+2)(x+3) = (x+4)(x+5) - (x+6)^2.$$
   Rozwiązanie:
   $$\begin{gathered} x^2 + 2x + 1 - x^2 - 5x - 6 = x^2 + 9x + 20 - x^2 - 12x - 36 \\ -3x - 5 = -3x - 16 \\ 5 = 16. \end{gathered}$$
4. Dane jest równanie $\dfrac{2-x}{1-2x} = \dfrac{1-3x}{3-x}$.
   Rozwiązanie:
   $$\begin{gathered} (2-x)(3-x) = (1-2x)(1-3x) \\ 6 - 2x - 3x + x^2 = 1 - 3x - 2x + 6x^2 \\ x^2 = 1 + 6x^2 - 6 \\ x^2 - 1 = 6(x^2 - 1) \\ 1 = 6. \end{gathered}$$

5. $x + x\sqrt{2} = 1$, znajdź x.
Rozwiązanie:
$$\begin{gathered} x\sqrt{2} = 1 - x \\ 2x^2 = 1 + x^2 - 2x \\ x^2 + 2x - 1 = 0 \\ x = -1 + \sqrt{2} \text{ lub } x = -1 - \sqrt{2}. \end{gathered}$$

6. Rozwiąż równanie $\sqrt{x-4} - \frac{3}{\sqrt{x-4}} - \sqrt{x-1} = 0$.
Rozwiązanie:
$$\begin{gathered} x - 4 - 3 - \sqrt{(x-1)(x-4)} = 0 \\ x - 7 = \sqrt{(x-1)(x-4)} \\ x^2 - 14x + 49 = x^2 - 5x + 4 \\ 9x = 45 \\ x = 5. \end{gathered}$$

7. Rozwiązujemy równanie $x^2 + x + 1 = 0$. Ponieważ zero nie jest pierwiastkiem tego równania, możemy obie jego strony podzielić przez x otrzymując równanie równoważne: $x + 1 + 1/x = 0$, skąd
$$(*) \qquad \frac{1}{x} = -(x+1).$$
Wyjściowe równanie jest też równoważne równaniu
$$(**) \qquad x^2 = -(x+1).$$
Przyrównując prawe strony obu powyższych równań otrzymujemy: $1/x = x^2$, skąd
$$x^3 = 1.$$
Zatem pierwiastkiem tego równania jest 1 i podstawiając go do równania wyjściowego (równoważnego temu ostatniemu) otrzymujemy: $1^2 + 1 + 1 = 0$, czyli $3 = 0$.
Wskazówka: $x^3 = 1$ można zapisać w postaci $(x-1)(x^2+x+1) = 0$.

B. Trochę rachunków z geometrii, euklidesowej i nie.

1. **Ulica Friedrichstrasse** w Berlinie ma długość ok. 3 km i biegnie prawie dokładnie z północy na południe. Domy na tej ulicy są, jak się domyślacie, budowane pionowo...

   (a) ...pionowo, czyli odpowiednie krawędzie tych domów przechodzą w przedłużeniu przez środek Ziemi. A zatem krawędzie domów na obu krańcach tej ulicy tworzą między sobą pewien kąt. Jaka jest wielkość tego kąta?

   (b) Ponieważ pionowe krawędzie krańcowych domów na Friedrichstrasse nie są równoległe, rozchodzą się swoimi górnymi krańcami trochę więcej niż dolnymi. O ile więcej?

Charakterystyka fizyczna Ziemi
Średnica równikowa 12 756,2 km
Średnica biegunowa 12 713,6 km
Przeciętna średnica 12 742 km
Przeciętny obwód 40 041,455 km

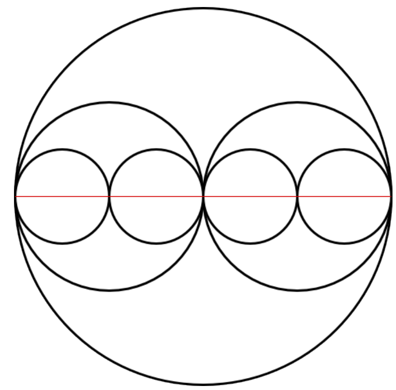
2. (a) **Wyobraźmy sobie sznur ułożony wzdłuż równika** Ziemi, będący o 10 m dłuższy od równika. Przyjmijmy dla uproszczenia, że odstaje on od powierzchni Ziemi wszędzie na jednakową, niewielką odległość. Jaka jest ta odległość? Czy między sznurem a Ziemią mogłaby przepełznąć mucha?

   (b) O ile, mniej więcej, dłuższa jest droga, którą przebywa głowa człowieka wędrującego dookoła Ziemi, od drogi, którą przebywają jego stopy?

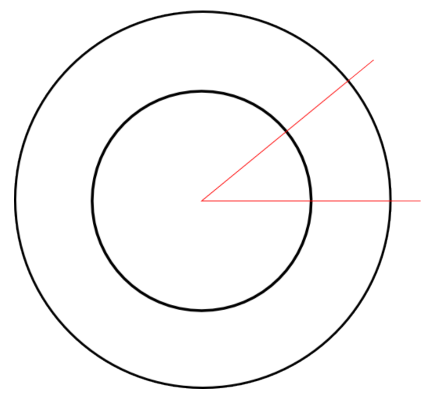
C. Znajdź błąd w rozumowaniu i spróbuj sformułować wniosek.

Liczba π równa jest 2. Kreślimy koło i jedną z jego średnic - niech jej długość wynosi d. Wówczas obwód koła wynosi πd. Kreślimy teraz w kole dwa koła dwa razy mniejsze, o środkach na narysowanej już średnicy, tak, że są styczne do siebie i do pierwszego koła (jak na rysunku). Suma obwodów tych kół wynosi również πd. Powtarzamy tę czynność dowolną ilość razy. Do czego doprowadzi to, gdy liczba kół dąży do nieskończoności? Figura ostateczna nie różni się od samej średnicy, którą oczywiście należy uważać jakby za podwójną: z jednej strony jako granicę górnych półkoli, z drugiej strony dolnych. Zatem:

$$\pi d = 2d, \quad \text{czyli } \pi = 2.$$



π nie istnieje. Na rysunku obok przedstawione są dwa koła współśrodkowe i dwa promienie wychodzące ze wspólnego środka. Widać, że każdemu punktowi mniejszego koła odpowiada dokładnie jeden punkt większego koła i odwrotnie. Oba koła mają tyle samo punktów, więc są równej długości.



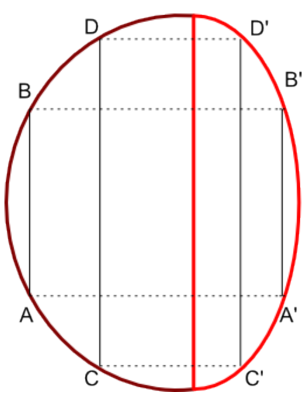
Pole elipsy jest równe polu koła. Weźmy połowę koła oraz połowę elipsy o jednej ze średnic równej średnicy koła.

Jak widać na rysunku obok, każdemu pionowemu odcinkowi z koła odpowiada dokładnie jeden odcinek pionowy o tej samej długości z elipsy. Rzeczywiście,

$$AB = A'B', \quad CD = C'D'.$$

Skoro obie figury składają się z tej samej liczby odcinków równej długości, ich pola musza być równe.

A zatem równe są także pole koła i pole elipsy.



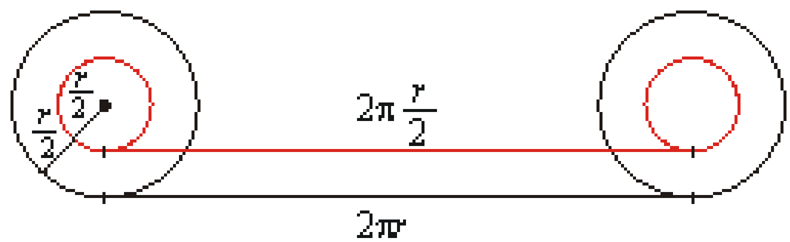
Niewymierność π.

Kuba (niezweryfikowany), czwartek, 18/06/2009 - 16:28
http://www.matematyka.wroc.pl/book/geometria-0

Ostatnio przeglądałem podręcznik do kl. 2 gimnazjum i wyczytałem tam, że wszystkie dowody niewymierności liczby pi są bardzo skomplikowane. Postanowiłem więc podać dowód zrozumiały nawet dla małych dzieci z podstawówki. Oto on. Gdy rozpatrujemy kolejne wielokąty foremne, widać, że one dążą do okręgu, więc okrąg jest wielokątem foremnym o nieskończonej liczbie boków. Zatem jego obwód jest niewymierny, bo nie można przecież zmierzyć ani obliczyć długości nieskończonej liczby boków! Stąd stosunek długości okręgu do średnicy jest niewymierny, bo jeśli podzielimy liczbę niewymierną przez dowolną liczbę różną od zera, to otrzymamy wynik niewymierny. Zatem liczba pi jest niewymierna. Chciałbym się dowiedzieć, czy powyższy dowód jest poprawny.

π nie istnieje, dowód drugi (*)

Koło toczy się po prostej wykonując jeden obrót. Pokona drogę równą obwodowi, czyli $2\pi r$. W tym czasie współśrodkowe z nim koło o dwa razy mniejszym promieniu również wykonuje jeden pełny obrót, zatem droga ta wynosi $2\pi r/2$. Ponieważ jest to ten sam odcinek otrzymujemy: $2\pi r = 2\pi r/2$, czyli $2 = 1$. Albo tez π nie jest w ogóle liczbą...

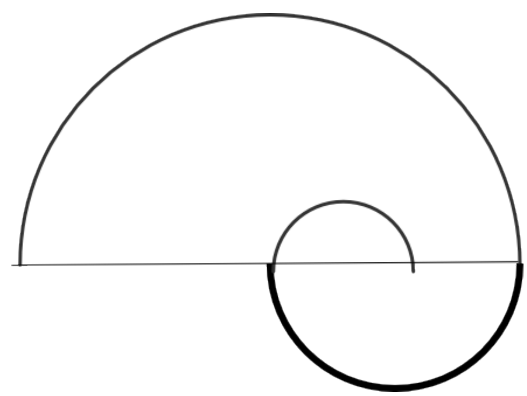


Dwie monety (*)

Bierzemy dwie jednakowe monety. Jedną kładziemy nieruchomo, a drugą toczymy po jej brzegu. Ponieważ wykonuje droge równą swojemu obwodowi, wykona jeden pełny obrót.
Uwaga: sprawdź! Będą jednak dwa obroty.

D. Zapowiedź tematów styczniowych — Spirala naszej wyobraźni. (*)

Utwórzymy w wyobraźni spiralę inna niż archimedesowska. Weźmy pół okręgu. Przystawmy do niego półokrag, którego średnica jest dwa razy mniejsza. Powtarzajmy tę czynność dowolnie długo...



(a) Ile razy możemy tę czynność powtórzyć, zanim dojdziemy do środka spirali?

(b) Jaka jest długość spirali?

Odpowiedzi Na start — kupiec stracił 100 zł, czyli 40 zł + towar za 60 zł. Pierwsza narzucająca się odpowiedź: 140 zł jest błędna, gdyż wcześniej otrzymał również prawdziwe 100 zł od sąsiada.

A.1.a bycie nad środkiem kuli może chyba znaczyć tyle, że nie jest się dokładnie w tym środku...

A.1.b nieścisłość: dowolna kula może poruszać się różnie...

A.2 nie należy dzielić przez 0. Tutaj $x - 1 = 0$.

A.3 pisać komentarze!!!

A.4 dzielenie przez 0: $x = 1$ jest rozwiązaniem, więc nie należy dzielić przez $x^2 - 1$

A.5 jeśli $a = b$, to $a^2 = b^2$, ale nie na odwrót

A.6 j.w.

A.7 równanie oryginalne i końcowe nie są równoważne, a to dlatego że odjęliśmy stronami (*) i (**). To nie jest równoważne przejście.

B.1.a ok 1',75

B.1.b ok 1cm (sprawdzić!!!)

B.2.a pod sznurem mógłby nawet przejść, nie schylając się, mały chłopiec!

B.2.b niewiele dłuższa, prawda? jest to poglądowe wytłumacznie wyniku z B.2.a. Ok 10 m.

C.1 Nieprawdziwa jest "zasada ciagłości" pochodząca podobno od Leibniza: każda własność przysługującą wyrazom ciagu jest prawdziwa dla granicy.

A my powiedzielibyśmy: zbiegać można w róznych miarach / metrykach...

C.2 j.w.

C.3 j.w.

C.4 pomieszanie pojęć i co najmniej dwa błędy, po pierwsze istnieją koła o obowodach wymiernych, po drugie np $a/a = 1$ równiez dla a niewymiernych.

C.5 Większe koło się toczy, a mniejsze - ślizga.

C.6 Moneta toczy się, wykonując obrót o pewien kąt względem swojego pierwotnego położenia. W każdym momencie ruchu uzyskuje jednak dodatkowy obrót o taki sam kąt - obrót ten pochodzi z zakrzywienia drugiej, nieruchomej monety. Zatem w każdej chwili ruchu wokół drugiej monety moneta obraca się o dwa razy większy kąt, niż gdyby toczyła się po prostej. Zatem okążając monetę wykona obrót o kąt 4π, a to odpowiada dwukrotnemu obwodowi.

D.1 nieskończenie wiele

D.2 $\pi r \cdot (1 + 1/2 + 1/4 + \ldots) = 2\pi r$.