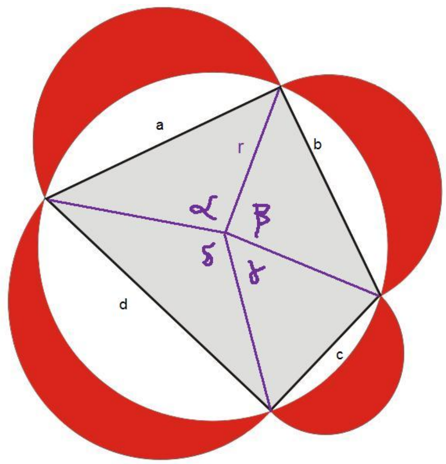
Matematyka dla Ciekawych Świata, 2011/2012

Księżyce Hipokratesa



Niech P_W oznacza pole czworokąta, zaś P_H pole zaznaczonego obszaru.

Dla $\alpha + \beta = \pi = \gamma + \delta = \pi$ równanie jest prawdziwe z zadania o trójkącie. Załóżmy, bez straty ogólności, że $\alpha + \beta > 0$.

Mamy

$$P_H = \frac{1}{2}(\frac{a}{2})^2\pi + \frac{1}{2}(\frac{b}{2})^2\pi + \frac{1}{2}(\frac{c}{2})^2\pi + \frac{1}{2}(\frac{d}{2})^2\pi + P_W - \pi r^2.$$

Zatem

$$P_H = \frac{1}{8}\pi(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + P_W - \pi r^2$$

Szukamy, kiedy $P_W = P_H$, a zatem musi zachodzić równość:

$$\frac{1}{8}\pi(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = \pi r^2,$$

czyli $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = 8r^2$.

Zauważmy:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2r}$$

$$a = 2r\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$a^2 = 4r^2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

Zatem:

$$4r^2(\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2} + \sin^2\frac{\delta}{2}) = 8r^2$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2} + \sin^2\frac{\delta}{2} = 2$$

Mamy $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$, stąd:

$$2 - \frac{1}{2}(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos\delta) = 2$$

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos\delta = 0$$

Co już staje się dosyć ciekawe. W szczególności widzimy, że dla $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \frac{\pi}{2}$ spełnia równanie (co może nie jest zbyt odkrywcze). Wykorzystamy wzór na sumę cosinusów: $\cos\psi + \cos\phi = 2\cos\frac{\psi+\phi}{2}\cos\frac{\psi-\phi}{2}$. Nasze równanie przyjmuje postać:

$$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 2\cos\frac{\gamma+\delta}{2}\cos\frac{\gamma-\delta}{2} = 0$$

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\gamma+\delta}{2}\cos\frac{\gamma-\delta}{2} = 0$$

Wykorzystajmy założenie, że $\alpha + \beta > \pi$. Oznaczmy przez $x = \alpha + \beta - \pi$. Wtedy oczywiście $\gamma + \delta = \pi - x$. Zauważmy, że $x \in (0, \pi)$. Podstawmy x do naszego równania:

$$\cos\frac{\pi+x}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\pi-x}{2}\cos\frac{\gamma-\delta}{2} = 0$$

Korzystamy ze wzorów redukcyjnych ($\frac{x}{2} \in (0, \frac{\pi}{2})$):

$$-\sin\frac{x}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \sin\frac{x}{2}\cos\frac{\gamma-\delta}{2} = 0$$

Ponieważ dla $x \in (0, \pi)$ zachodzi $\sin\frac{x}{2} > 0$, otrzymujemy:

$$-\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\gamma-\delta}{2} = 0$$

$$\cos\frac{\gamma-\delta}{2} - \cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 0$$

Zatem (wzór na różnicę cosinusów):

$$-2\sin\frac{\gamma-\delta+\alpha-\beta}{4}\sin\frac{\gamma-\delta-\alpha+\beta}{4} = 0.$$

Wnioskujemy:
$\frac{\gamma-\delta+\alpha-\beta}{4} = 0 + k\pi$ lub $\frac{\gamma-\delta-\alpha+\beta}{4} = 0 + k\pi$,
gdzie k liczba całkowita.
Zauważmy, że oba warunki są symetryczne. Rozważmy zatem tylko pierwszy z nich:

$$\frac{\alpha-\beta+\gamma-\delta}{4} = 0 + k\pi$$

$$\alpha - \beta + \gamma - \delta = 0 + 4k\pi$$

$$\alpha - \beta + \gamma - \delta = 0$$

Podstawmy $\alpha = \pi + x - \beta$ oraz $\gamma = \pi - x + \delta$:

$$2\pi - 2\beta - 2\delta = 0$$

$$\pi = \beta + \delta$$

Stąd $\alpha + \gamma = \pi$ i korzystając z zadania o trójkącie mamy zrobione zadanie.
$P_W = P_H \iff$ conajmniej dwa wierzchołki czworokąta leżą na średnicy.