Ćwiczenia 4

1. Algebraiczność. Wykaż, że

(a) pierwiastki z liczb całkowitych są algebraiczne;

(b) (*) pierwiastki z liczb algebraicznych są algebraiczne.

2. Dowód nie wprost. (*) Wykaż, że $\sqrt[4]{3}$ jest liczbą niewymierną.

3. Zadanie problemowe. Jak osiągać coraz lepsze przybliżenia $\sqrt{2}$? (***)

Dzięki Heronowi z Aleksandrii (I w n.e.) mamy następujący algorytm.

Najpierw zgadujemy pewną liczbę $a_0 > 0$; może być to dowolna liczba dodatnia - jej wartość ma wpływ jedynie na liczbę iteracji konieczną do osiągnięcia przybliżenia z żądaną dokładnością. Mając a_0, rozpoczynamy poniższe obliczenia:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + \frac{2}{a_n}}{2} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}; \qquad n \geq 0.$$

Otrzymujemy ciąg liczb. Taka jego definicja zwana jest rekurencyjną, co znaczy, że każdy kolejny obiekt — wyraz tego ciągu — definiujemy odwołując się do poprzedniego. (A więc nie możemy obliczyć tysięcznego nie licząc 999-ciu poprzednich).

(a) Wybierz sobie a_0 i oblicz trzy kolejne wyrazy swojego ciągu.

(b) W arkuszu kalkulacyjnym oblicz 100 kolejnych wyrazów tego ciągu dla wybranych a_0.

(c) Spróbuj uzasadnić, że: *jeżeli ten ciąg ma granicę*, to jest ona liczbą dodatnią.

(d) *Załóżmy, że ciąg ten ma granicę (nazwijmy ją A).* Wykaż, że spełnia ona równanie $A^2 = 2$.

(e) Sformułuj wniosek (wstępny).

(f) Rozpatrzmy przypadek $a_0 = 2$. Spróbuj uzasadnić, że nasz ciąg jest wtedy malejący.

(g) Ciągle dla przypadku $a_0 = 2$. Spróbuj uzasadnić, że żaden wyraz tego ciągu nie jest mniejszy od 1 (a nawet od $\sqrt{2}$).

(h) Skorzystaj z twierdzenia, którego treść prowądzacy Ci objaśni, aby wyciągnąć wniosek:

Twierdzenie *Każdy ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny.*

(i) Czy założenie $a_0 = 2$ było konieczne?

(j) Czy umiesz znaleźć podobną metodę dla $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{13}$?