Matematyka dla Ciekawych świata
Zestaw zadań 1"

Rozgrzewka

Zadanie 1. Rozłożyć na ułamki proste $\frac{1}{x(x+1)}$. Obliczyć sumę $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$.

Zadanie 2. Oszacować ogon szeregu geometrycznego od momentu N, to znaczy wyrażenie: $\sum_{n=N}^{\infty} q^n$ (oczywiście dla $q \in (-1,1)$).

Zadanie 3. Niech $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych *dodatnich*. Pokazać, że:

a) ciąg sum częściowych szeregu $\sum a_n$, to znaczy $S_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$ jest rosnący,

b) jeśli ciąg a_n jest malejący, to dla szeregu *naprzemiennego* $\sum(-1)^n a_n$ ciąg parzystych sum częściowych S_{2n} jest malejący, zaś ciąg nieparzystych sum częściowych S_{2n+1} jest rosnący.

Szeregi potęgowe i liczby Fibonacciego

Zadanie 4. Rozwinąć w szereg potęgowy:

a) $\frac{1}{1-x}$

b) $\frac{1}{1-x/2}$

c) $\frac{3x}{1-2x}$

d) $\frac{1}{1-x^2}$

e) $\frac{A}{1-\alpha x}$

f) $\frac{A}{1-\alpha x} + \frac{B}{1-\beta x}$

g) $\frac{x}{1-x-x^2}$

Zadanie 5. Udowodnić (np. korzystając ze wzoru Bineta), że iloraz kolejnych liczb Fibonacciego (dokładniej F_{n+1}/F_n) zbiega do złotej proporcji $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Trygonometria

Zadanie 6. Wyprowadzić wzory (najlepiej w tej kolejności):

a) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$

b) $\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))$

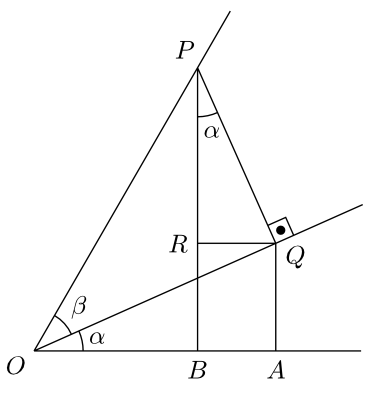
c) $\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$

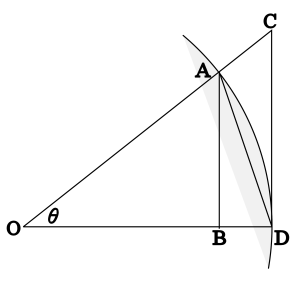
Zadanie 7. Udowodnić, że $\sin\theta < \theta < \operatorname{tg}\theta$ dla $\theta \in (0,\pi/2)$.

Zadanie 8. (*) Udowodnić, że $0 < 1 - \frac{\sin\theta}{\theta} < \theta^2$ dla $\theta \in (0,\pi/2)$.

Zadanie 9. (*) Udowodnić, że $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \cos 36^o = \frac{\phi}{2}$, gdzie ϕ to złota proporcja.

Przydatne obrazki





Podpowiedzi

Zadanie 1. $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$
Zadanie 2. Wyciągnij przed nawias wspólny czynnik i zastosuj wzór na sumę szeregu geometrycznego.
Zadanie 3. Postaraj się dobrze zrozumieć definicję S_n. Pamiętaj o założeniu, że a_n są dodatnie. Jeśli to nie pomoże, rozpatrz konkretny przykład.
Zadanie 4.

a) przypomnij sobie wzór na sumę szeregu geometrycznego

b) podstaw $y = x/2$

c) wystaw $3x$ i rozłóż najpierw otrzymaną funkcję wymierną (ułamek)

d) pomyśl :) jest kilka sposobów na rozwiązanie tego zadania

e) i f) zastosuj pomysły z b) i c)

g) skorzystaj z punktu f)

Zadanie 5. Przyjrzyj się wzorowi Bineta, szczególnie liczbom ϕ i $\hat{\phi}$. Jak się zachowują: ϕ^n i $\hat{\phi}^n$?
Zadanie 6.

a) Przyjrzyj się pierwszemu obrazkowi. Załóż, że $|OP| = 1$. Postaraj się znaleźć na obrazku odcinki o długościach: $\cos(\alpha + \beta), \sin\alpha, \sin\beta, \cos\alpha, \cos\beta$.

b) Wykorzystaj wzór na $\cos(\alpha + \beta)$, parzystość funkcji cos i nieparzystość sin aby otrzymać wzór na $\cos(\alpha - \beta)$. Podstaw oba te wzory do żądanej równości.

c) Dla danych x i y spróbuj znaleźć takie α i β, żeby żądany wzór był równoważny temu z punktu b)

Zadanie 7. Przyjrzyj się drugiemu obrazkowi. Załóż, że $|OA| = 1$. Znajdź na nim figury o polach równych: $\frac{\sin\theta}{2}$, $\frac{\theta}{2}$, $\frac{\operatorname{tg}\theta}{2}$.
Zadanie 8. Zastosuj (kreatywnie) poprzednie zadanie. Przypomnij sobie jak inaczej wyrazić $1 - \cos\theta$.
Zadanie 9. Jest kilka sposobów rozwiązania tego zadania. Możesz skorzystać z tw. Ptolomeusza, wyprowadzić wzór na $\cos 5\alpha$ lub (w ostateczności) zajrzeć do Wikipedii...