Pochodna sin x

Co warto wiedzieć:

1. Pochodna f(x)z definicji to

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

2. Sin(α+β)=sin αcos β+cosαsin β

Fragment książki: Stefan Banach „Rachunek różniczkowy i całkowy" , Warszawa 1957, PWN.

§ 81. Pochodne funkcyj trygonometrycznych.

1. $y = \sin x, \quad y' = \cos x.$

Mamy

$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x),$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x},$$

więc

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

Oznaczając $\Delta x/2 = h$ otrzymujemy

$$\lim_{\Delta x \to 0} h = 0$$

i na mocy § 43.3 mamy

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1,$$

a wobec ciągłości funkcji $\cos x$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) = \lim_{h \to 0} \cos(x+h) = \cos x,$$

a więc

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x.$$

§43

3. Wykreślmy koło o promieniu $OB = 1$ i obierzmy dowolną średnicę EB. Prosta BD jest styczną do koła w punkcie B. Jeżeli teraz $BC = h$ jest dowolnym łukiem, to oznaczając przez A rzut punktu C na OB, a przez D punkt przecięcia prostej OC ze styczną BD,

otrzymamy na mocy definicji funkcyj trygonometrycznych

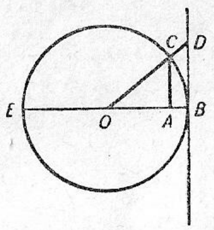
$$AC = |\sin h|, \quad OA = |\cos h|, \quad BD = |\operatorname{tg} h|.$$

Jeżeli $-\pi/2 < h < \pi/2$, to, jak łatwo odczytać z rysunku 5,

(1) $$|\sin h| \leqslant |h|,$$

(2) $$|\cos h| \geqslant 1 - |\sin h|.$$

Pierwszą nierówność otrzymujemy z uwagi, że łuk BC jest większy niż cięciwa BC, a ta znów jest większa niż AC. Drugą nierówność otrzymujemy z trójkąta OCA opierając się na twierdzeniu, że bok trójkąta jest większy od różnicy dwu pozostałych.



Rys. 5

Z nierówności (1) otrzymujemy łatwo, że

$$\lim_{h \to 0} \sin h = 0.$$

Z nierówności (2) i z uwagi, że $\cos h \leqslant 1$, wynika, że

$$\lim_{h \to 0} \cos h = 1.$$

Z rysunku otrzymujemy następującą nierówność:

$$\text{pole } OAC \leqslant \text{pole wycinka } OBC \leqslant \text{pole } OBD,$$

więc

$$\frac{1}{2}\cos h\,|\sin h| \leqslant \frac{1}{2}|h| \leqslant \frac{1}{2}|\operatorname{tg} h|,$$

stąd z uwagi, że wobec $-\pi/2 < h < \pi/2$ jest

$$\frac{\sin h}{h} = \frac{|\sin h|}{|h|},$$

otrzymujemy

$$\cos h \leqslant \frac{h}{\sin h} \leqslant \frac{1}{\cos h},$$

a więc

$$\frac{1}{\cos h} \geqslant \frac{\sin h}{h} \geqslant \cos h,$$

a ponieważ

$$\lim_{h \to 0} \cos h = 1 \quad \text{i} \quad \lim_{h \to 0} \frac{1}{\cos h} = 1,$$

więc

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1.$$