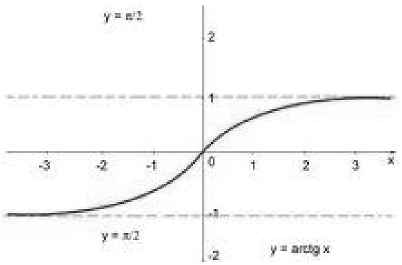
Pochodna arctg x?

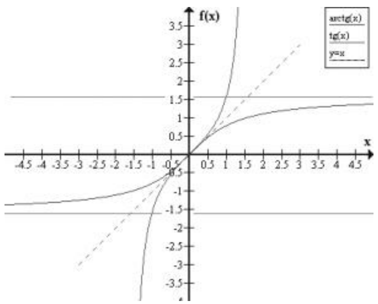
Co to jest arctg?

Arcus tangens jest funkcją odwrotną do funkcji tangens
[*rozpatrywanej na przedziale (-π/2, π/2)].*
W przedziale tym tangens jest funkcją rosnącą (zatem różnowartościową) – wobec czego ma funkcję odwrotną, którą określamy na przedziale (-∞, +∞)
[obrazie przedziału (-π/2, π/2)].

arctg (-∞, +∞) → (-π/2, π/2)
arctg(*x*) = *y*, gdy *tg y* = *x*.
(zgodnie z określeniem funkcji odwrotnej)

Na przykład: *arctg* 0 = 0 (tg 0=0),
arctg 1 = π/4 (tg(π/4)=1)
arctg√3=π/3 (tg(π/3)= √3)



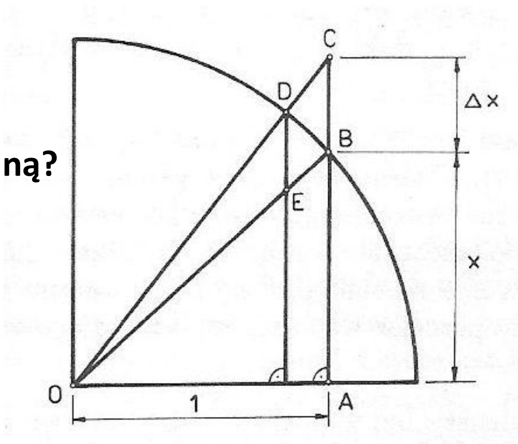


Wykresy funkcji tg i arctg są symetryczne względem prostej y=x.

Własności funkcji *arctg:* rosnąca, ciągła, różniczkowalna.

Obok fragment artykułu: „Jak policzyć elementarnie pochodną arctg x”, Piotr Hajłasz; Delta 8/1992

Jak policzyć jego pochodną?



Zakładamy, że $x > 0$. Zauważmy, że z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta OAB wynika, że promień okręgu jest równy $\sqrt{1+x^2}$.

Otóż

(♠) Pole $\triangle ODE <$ Pole wycinka $ODB <$ Pole $\triangle OCB$.

Oczywiście,

$$\text{Pole } \triangle OCB = \text{Pole } \triangle OCA - \text{Pole } \triangle OBA = \frac{\Delta x}{2}.$$

Trójkąty OCB i ODE są podobne, więc

$$\text{Pole } \triangle ODE = \left(\frac{OD}{OC}\right)^2 \cdot \text{Pole } \triangle OCB = \frac{1+x^2}{1+(x+\Delta x)^2}.$$

Ponadto bezpośrednio z definicji arctg wynika, że $\angle BOA = \operatorname{arctg} x$ i $\angle COA = \operatorname{arctg}(x+\Delta x)$. Skąd

$$\text{Pole wycinka } ODB = \frac{1}{2}(1+x^2)(\operatorname{arctg}(x+\Delta x) - \operatorname{arctg} x).$$

Korzystając z (♠) otrzymamy

$$\frac{1}{1+(x+\Delta x)^2} < \frac{\operatorname{arctg}(x+\Delta x) - \operatorname{arctg} x}{\Delta x} < \frac{1}{1+x^2}.$$

Przechodząc do granicy przy $\Delta x \to 0$ uzyskujemy wzór na pochodną

$$(\operatorname{arctg} x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{arctg}(x+\Delta x) - \operatorname{arctg} x}{\Delta x} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Łatwo zauważyć, że dla $x < 0$ pochodna wyraża się tym samym wzorem. Wynika to z zauważenia, że $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$. A teraz zadanie dla Czytelników. Jak geometrycznie wyprowadzić wzory na pochodne innych funkcji cyklometrycznych?