1. **Bryły platońskie**

Na wykopalisku starożytnej miejscowości etruskiej w okolicach dzisiejszej Padwy, archeologowie znaleźli tajemniczy kamień. Pochodził on z szóstego wieku p.n.e. i wyróżniał się zadziwiającą symetrią. Miał 12 identycznych ścian. Każda ściana miała pięć krawędzi identycznej długości i pięć identycznych kątów. Co więcej, każda ściana była obrotem ściany sąsiedniej o ten sam kąt. Symetria i harmonia tego kamienia nie mogła rzecz jasna być przypadkowa – ale po co ktoś stworzył coś takiego? Dlaczego w ogóle o tym myślał? Chociaż cel istnienia tego kamienia pozostaje nieznany, inspiracją do stworzenia go mogła być obserwacja tego, jak sama przyroda tworzy kształty w skałach.

Kształty kryształów

Kształt kryształu jest określony przez bloki atomów, z których powstaje. W ziarenku zwykłej soli kuchennej możemy zobaczyć kryształ wyglądający jak sześcian. Cząsteczki, które tworzą sól składają się z jednego atomu sodu i jednego atomu chloru. Kiedy te cząsteczki układają się koło siebie, doskonale do siebie pasują, jak kawałki puzzla. Nie ma między nimi dziur, także wypełniają jak najmniej przestrzeni. Powtarzający się wzorzec tworzy pewną strukturę. Kiedy widzimy kształt kryształka soli, patrzymy tak naprawdę na wynik „upakowania się" bilionów cząsteczek.

Jest to tylko jeden z wielu sposobów, na które może utworzyć się kryształ. Jeżeli popatrzymy na atomy węgla tworzące diament, zobaczymy inny wzorzec, inaczej wypełniający przestrzeń. W rezultacie otrzymujemy kształt zwany ośmiościanem.

Symetria brył foremnych

Struktura tych kryształów jest podobna do tej, jaką miał ów etruski kamień. Każda ściana bryły jest takim samym wielokątem foremnym. Każda ściana składa się z krawędzi identycznej długości, kątów o identycznych miarach, i można ją otrzymać przez obrót ściany sąsiedniej o jakiś jeden ustalony kąt. Bryły te (wielościany) posiadają doskonałą harmonię matematyczną i symetrię. To geometryczne piękno było podstawą wierzeń mistycznej Szkoły Pitagorejskiej, założonej w starożytnej Grecji ok 550 r. pne.

Pitagorejczycy szukali piękna w liczbach i kształtach, i uważali, że szukanie harmonii jest sposobem na zrozumienie świata przyrody. Badali kształty brył, które można utworzyć ze ścian będących identycznymi wielokątami foremnymi. Jest ich jedynie pięć! Czworościan, sześcian, ośmiościan, dwunastościan, dwudziestościan.

Starożytni Grecy badali nie tylko własności każdej bryły, ale również relacje zachodzące pomiędzy nimi - i zauważyli ciekawą rzecz. Jeśli np. zaznaczyli środek każdej ze ścian sześcianu i połączyli te punkty krawędziami i ścianami, otrzymywali ośmiościan. Podobnie, jeśli połączyli środki każdej ze ścian ośmiościanu, otrzymywali sześcian. Ze względu na tę relację, sześcian i ośmiościan nazywamy bryłami dualnymi.

Dwunastościan tez ma swoją bryłę dualną, jest nią dwudziestościan. Wierzchołki dwudziestościanu pokrywają się idealnie ze środkami ścian dwunastościanu. I na odwrót. Czworościan jest bryłą dualną do samej siebie, gdyż połączenie środków ścian czworościanu tworzy nowy czworościan.

Pitagorejczycy

Chociaż to Pitagorejczycy badali te bryły, na ogół nie nazywamy ich imieniem Pitagorasa, lecz imieniem wielkiego filozofa Platona, który kontynuował ich badania.

Jako że Platon żył jakieś dwa tysiące lat przed Kartezjuszem, który wymyślił dla opisywania kształtów geometrycznych układ współrzędnych, znalazł sobie on inny sposób na ich mierzenie.

Odkrył, ze może posłużyć się twierdzeniem Pitagorasa, opisującym stosunki długości w trójkącie prostokątnym. Jeżeli umiałby opisać bryły w terminach trójkątów prostokątnych, twierdzenie pozwaliłoby mu określić odpowiednie miary.

2. Świat Timaiosa

Platon widział w ścianach czworościanu nie tyle trójkąty równoboczne, co sześć trójkątów prostokątnych. Czworościan był zbudowany z 24 trójkątów prostokątnych, ośmiościan z 48, dwudziestościan ze 120 trójkątów prostokątnych.
Bryły zyskiwały w ten sposób to nie tylko świetne narzędzie służące do ich mierzenia, ale i coś z piękna, które Grecy odnajdowali w twierdzeniu Pitagorasa.

Bryły kosmiczne

Platon nie używał oczywiście nazwy bryły platońskie, tak jak my, ale nazwał je ciałami kosmicznymi. Ze względu na doskonałe piękno, jakie w nich widział, stwierdzał, że te bryły foremne przedstawiają cztery żywioły, które uważał za budulce całej materii. Uważał, że czworościan reprezentuje ogień, sześcian ziemię, dwudziestościan wodę, ośmiościan powietrze, zaś cały Wszechświat miał być reprezentowany przez dwunastościan.

Było to w istocie pierwsze podejście do stworzenia tablicy pierwiastków. Platon uważał, że badanie relacji zachodzących pomiędzy tymi bryłami pozwoli zrozumieć reakcje chemiczne. Wszystko, co istnieje, miało być kombinacją tych czterech pierwiastków. A skoro „ciała kosmiczne" były zbudowane z trójkątów, zatem wszystko inne również! W ten sposób Platon doszedł do *bardzo współczesnego* pojęcia triangulacji. W każdym razie dla niego natura rzeczy zależała od natury budujących ją trójkątów.

Trójkątny człowiek

W książce (dialogu) „Timaios" Platon zarysował swoją teorię materii. Jako przykład podał, jak trójkąty mogą opisywać proces starzenia się. Uważał, że osoba młoda posiada szkielet zbudowany ze świeżych, nowych trójkątów, mających silne połączenia między sobą.
Kiedy młody człowiek coś zjada, świeże trójkąty jego ciała są silniejsze od słabych trójkątów pożywienia. Może zatem z łatwością je strawić. Jego ciało przyswaja moc tamtych trójkątów i rośnie.
U ludzi starszych struktura trójkątów zdążyła się osłabić. Kiedy oni coś jedzą, ich słabsze trójkąty nie są w stanie połamać trójkątów pożywienia. Są mniej zdolni do przyswajania siły trójkątów pożywienia i tym bardziej marnieją.

Pomysł o zjadaniu trójkątów wydaje się dość głupi. Ale kosmiczna wizja, jaką miał Platon, była jednym z pierwszych sposobów, w jaki ludzie próbowali wytłumaczyć świat widzialny za pomocą matematyki i geometrii. Jeżeli świat wokół nich był zbudowany z trójkątów, mogli mierzyć trójkąty - a zatem mierzyć świat. Jeśli mogli go zmierzyć, mogli go zrozumieć.

3. Układ słoneczny Keplera

Elementy

Zacząwszy od trójkątów, matematycy stworzyli następnie więcej narzędzi do pomiaru otaczającego ich świata. Najważniejszym zbiorem tych narzędzi geometrycznych były Elementy Euklidesa, w których zebrał on całą wiedzę geometryczną Greków. Książka ta stała się najważniejszą, a w każdym razie najbardziej wpływową w całej historii matematyki.

W ostatnim rozdziale Elementów, Euklides zajął się bryłami platońskimi oraz ich związkiem ze sferami. Każda z tych brył posiada środek. To oznacza, że możemy skonstruować taką sferę o tym samym środku, która by stykała się z każdym z wierzchołków bryły. Albo mniejszą sferę, która stykałaby się z każdym środkiem ściany.

Struktura Nieba
To właśnie związek pomiędzy bryłami Platońskimi a sferami zainspirował astronoma Johannesa Keplera. Przez wieki, astronomowie obserwowali słońce, księżyc, planety i próbowali stworzyć model ich ruchu. Konceptów było bez liku.

Najczęściej modele te pochodziły bardziej z filozofii niż z obserwacji. Niebo uważane było za coś doskonałego, a więc i jego modele musiały być w jakimś sensie doskonałe.

w 1595 r., Kepler miał pomysł, by użyć doskonałego piękna brył platońskich do wyjaśnienia struktury Nieba. Zobrazował orbity ziemi i innych planet jako część wyimaginowanych sfer o jednym środku. Proporcje pomiędzy promieniami sfer miały być wyznaczone przez bryły platońskie.

Najbardziej wewnętrzną sferą miała być orbita Merkurego. Sfera ta leżała w ośmiościanie. Na nim opisana była sfera będąca orbitą planety Wenus. Na niej dwudziestościan i znów sfera z orbitą Ziemi. Dalej dwunastościan i w końcu czworościan zawierający orbitę Jupitera, w końcu orbita Saturna miała zawierać się w sześcianie, na którym miała być opisana sfera zawierająca wszystkie gwiazdy.

Model ten zawierał platońskie bryły kosmiczne i był jak najbardziej odpowiedni dla rzeczy tak majestatycznej jak układ słoneczny. Jednym problemem było to, że nie zgadzał się z obserwacją!

Pomiar orbit planet
Dane, które zburzyły idee Keplera, były zebrane dzięki wciąż ulepszanej technologii teleskopu. Jak na ironię, to właśnie teleskop dał Keplerowi nie tylko dane, ale i właściwą inspirację.

Teleskopy opierają się na własnościach optycznych soczewek i luster. Kształty tych soczewek i luster opierają się na krzywych, które możemy otrzymać przez przekrój stożka. W wyniku takiego przecięcia stożka płaszczyzną, możemy otrzymać pięć kształtów: hiperbolę, parabolę, punkt, elipsę lub okrąg. Kepler wybrał elipsę i starał się za jej pomocą opisać ruch planet. W cudowny sposób zgadzało się to doskonale z danymi zebranymi przez teleskopy. Rozwinął prawa rządzące położeniem i prędkością planet.

Chociaż Kepler tak dokładnie opisał ten ruch, nie był w stanie powiedzieć, *dlaczego* planety poruszają się w ten właśnie, a nie inny sposób. Problem polegał na tym, ze nie istniały jeszcze wtedy narzędzia matematyczne, za pomocą których mógłby opisać czynniki wchodzące tu w grę.

Problem w tym, że prędkość planety i jej odległość od słońca nieustannie zmienia się. Matematyka Keplera nie była w stanie uchwycić takich ruchomych celów.

4. Pomiary dyskretne

Ten sam problem występował przy obliczeniach znacznie bardziej przyziemnych – mianowicie przy rzeczach takich jak beczki.

Od beczki z winem do rachunku różniczkowego
Otóż właściciele winnic nie mieli żadnego wzoru, który określałby objętość zakrzywionej beczki wina. Nie wiadomo było, jaki jest promień takiej beczki, gdyż wciąż się on zmieniał – był mały na

górze, większy w środku, znów się zmniejszał na dole.

Zazwyczaj producenci wina robili to „na oko”. Mierzyli promień gdzieś po środku i uznawali, że objętość beczki jest taka, jak objętość walca o takim właśnie promieniu podstawy. Ale, rzecz jasna, człowieka takiego jak Kepler to nie zadowalało. Kepler chciał znaleźć lepsze rozwiązanie. Postanowił więc użyć do zmierzenia tej objętości nie jednego walca, ale kilku mniejszych.

Te małe walce, gdy się złożyło je razem, lepiej przybliżały beczkę i jej objętość. Kepler stwierdził też, że im mniejsze weźmie walce, tym lepiej przybliży beczkę: suma ich objętości będzie coraz bliższa objętości beczki. A gdy wysokość walców będzie dążyć do zera, będzie mógł naprawdę zmierzyć, jaką objętość ma owa krzywa beczka.

Kepler nie był jedynym, który próbował mierzyć skomplikowane krzywe rzeczy rozdrabniając je na kawałki które zmniejszały się do zera. Podobnie postępował Caviellieri: ciął rzeczy na nieskończenie małe kawałki, po czym je dodawał. W końcu, aby opisać tego typu czynności, powstał rachunek różniczkowy – wynaleźli go niezależnie Newton i Leibniz.

Rachunek różniczkowy stał się zupełnie nowym spojrzeniem na matematyczny świat. Był on w stanie opisać jakąś wciąż zmieniającą się wielkość na krzywej i zmierzyć ją używając nieskończenie małych odległości.

Przybliżanie krzywych gładkich

Mierzenie nieskończoną liczbą zer nie jest czynnością, którą wykonamy za pomocą linijki, ale rachunek różniczkowy otworzył matematykom okno na świat logiki wykraczającej poza to, co da się zmierzyć fizycznymi narzędziami.

Do tamtego czasu, matematycy nie umieli zrobić tego kroku. Używali tylko danych, które pochodziły z pomiarów. Na przykład w przypadku brył platońskich czy innych kanciastych przedmiotów, mogli określić pewne szczególne punkty przestrzeni, które były połączone krawędziami i ścianami. Określenie czegoś za pomocą informacji o ograniczonej wielkości nazywa się pomiarem dyskretnym.

W pomiarze dyskretnym , punkty mają określone położenie w przestrzeni i są połączone liniami prostymi. Kierunek linii zmienia się tylko w tych danych punktach. To oznacza, że taka dyskretna linia – czyli linia łamana – nigdy nie będzie w stanie zmierzyć długości linii krzywej! Nawet gdyby punkty były rozmieszczone bardzo blisko siebie, proste odcinki które je łączą byłyby wciąż drogą na skróty i miały by mniejszą długość niż kawałki krzywej. Jedyną metodą jest pozostawianie pomiarów dyskretnych i użycie rachunku różniczkowego, w którym odległość między punktami jest zerowa.

Pole latarni Schwarza

Taka sama zasada odnosi się do powierzchni. Otóż pole takiej zakrzywionej gładko powierzchni może być przybliżone przez dyskretną siatkę. Mamy na niej punkty, połączone liniami prostymi i płaskimi ścianami. Jeśli dodamy do siatki więcej punktów, będziemy mieli lepsze przybliżenie, ale nigdy nie będzie to top samo co nasza krzywa powierzchnia! Aby to zrobić, trzeba znów użyć rachunku różniczkowego.

Są tu jednak pułapki – to, że punkty sitaki będą bardzo blisko siebie, nie znaczy wcale jeszcze, że powierzchnia siatki musi przybliżać powierzchnię zakrzywioną.

Wróćmy na przykład do prostego obiektu jakim jest walec. Zrobimy zgrubne przybliżenie jego powierzchni siatką zrobioną z trójkątów. Nazywa się ją latarnią Schwarza. Ta siatka jest oczywiście zbyt zgrubna, i żeby mieć lepsze przybliżenie musimy do niej dodać więcej punktów – oczek.

Otóż możemy to zrobić na dwa sposoby. Albo dodać oczka i zwiększyć liczbę trójkątów *wokół* walca, albo też *wzdłuż* jego wysokości.

Zwiększenie liczby oczek na około walca wygładzi naszą siatkę i dobrze przybliży powierzchnię walca. Ale gdy będziemy dodawać oczka wzdłuż wysokości walca, siatka zrobi się jednym wielkim zygzakiem! Dodawanie trójkątów pionowo sprawia, że siatka coraz bardziej zagina się i wygląda jak akordeon. A zatem jego powierzchnia stale się zwiększa, i nieskończenie przekracza powierzchnię naszego początkowego walca.

Może to się wydawać oczywiste, bo widzimy, jak to się dzieje. Ale gdy będziemy dodawać punkty wokół walca i wzdłuż jego wysokości jednocześnie, wydaje się że otrzymamy jak najbardziej prawidłowe przybliżenie.

Tutaj już pozory mylą, bo wciąż mamy mnóstwo zagięć, tak jak wcześniej. Są one małe, ale są. Zależnie od tego jak dużo oczek dodamy, powierzchnia naszej siatki będzie mogła być dowolnie dużą liczbą.

Tak więc, nawet gdy siatka wydaje się dobrym przybliżeniem, musimy wiedzieć, jak się zachowuje *w granicy*. Nieskończenie drobne siatki wcale niekoniecznie dadzą nam właściwą odpowiedź.

5. Symulacje

Wydaje się, iż w świecie, w którym wielkości zmieniają się w sposób ciągły, pomiary dyskretne mogą nam dostarczyć jedynie „połamanych”, „pokawałkowanych” informacji. Aby objąć wszystkie dane na krzywej, pomiary dyskretne muszą być w jakiś sposób „zmiażdżone” do zera. A nawet wtedy wcale nie wiadomo, czy dadzą nam właściwą odpowiedź. W takim razie po co nam one? Dlaczego matematycy mieliby używać modeli dyskretnych do opisania rzeczy, które się nieskończenie zmieniają?

Matematyka dyskretna, niby tak bardzo prostacka, otrzymała niesamowity zastrzyk energii przez wynalazek najbardziej zaawansowanego narzędzia obliczeń – komputera.

Komputery, pomimo że są tak potężne, umieją „myśleć” o wszelkich obiektach jedynie za pomocą skończonych zbiorów liczb. Nieskończenie wiele danych, które opisuje krzywą nigdy nie zmieści się w jego pamięci. To oznacza, że komputer pracuje na danych *dyskretnych*.

Za pomocą tego nowego narzędzia jakim jest komputer, inżynierowie mogą w liczbowym świecie skonstruować budynek i przetestować jego konstrukcję, omijając wydatki i niebezpieczeństwa, na jakie byliby narażeni w świecie realnym. Problemem było, to że starsze komputery nie umiały radzić sobie ze zbyt dużą ilością danych naraz. Zatem inżynierowie musieli wskrzesić dyskretne myślenie o świecie.

W miarę, jak komputery stawały się coraz lepsze i mogły radzić sobie z większą ilością danych, inżynierowie mogli tworzyć dokładniejsze modele. To znaczy - określali swoje struktury za pomocą większej liczby punktów. Poza tym, zamiast prostokątów zaczęli używać trójkątów. Jak już dobrze wiemy, nie był to pierwszy raz, kiedy ludzie spojrzeli na świat jako na zbudowany całkowicie z trójkątów.

Im mniejsze są trójkąty w symulacjach, tym dokładniejsze dają wyniki. Siatki w tych symulacjach były bardzo drobne, ale ich trójkąty wcale nie starały się zniknąć wielkością do zera. Wyniki otrzymane dzięki tym symulacjom bardzo dokładnie przybliżały siły dynamiczne i wytrzymałość materiałów budowlanych.

Prace inżynierów przyciągnęły uwagę matematyków. Musieli oni uznać użyteczność dyskretnych przybliżeń. Widać było, że opis dyskretny miał chyba jednak jakąś wartość w opisie bardzo złożonych zjawisk.

Pierwszym wyzwaniem jest tu zrozumienie, w jaki sposób kanciaste linie łamane geometrii dyskretnej mogą dobrze opisać coś krzywego. Aby mu podołać, musimy zdefiniować coś, co nazywa się krzywizną.

6. Krzywizna i napięcie powierzchni

Mając daną krzywą, możemy określić jej krzywiznę za pomocą strzałki, skierowanej prostopadle do niej. Przesuwamy strzałkę wzdłuż krzywej, i a miarę tego przesuwania, jej kierunek zmienia się. Możemy spojrzeć na zmianę kierunku tej strzałki jako na miarę tego, jak bardzo jej droga jej zakrzywiona. Narysujmy sobie zmieniające się nachylenie naszej strzałki na łuku koła. Im bardziej strzałka skręca w trakcie swojego ruchu po krzywej, tym większa jest krzywizna.

Czy takie podejście będzie działać również dla linii łamanej, która nie jest ładnie, gładko zakrzywiona, ale ma rogi? Kiedy będziemy przesuwać strzałkę wzdłuż takiej linii, jej kierunek nie będzie się zmieniał dopóki nie dotrze właśnie do rogu - do wierzchołka. W tym punkcie nagle zakręci i dalej się będzie przesuwać nie zmieniając kierunku . Całkowity kąt zakreślony przez strzałkę może być uznany za krzywiznę naszej linii łamanej.

Jeśli łamana ta zamknie się i stworzy wielokąt, jej krzywizna będzie równa pełnemu obrotowi, 360 stopniom. I ta całkowita krzywizna nie zmieni się nawet gdy będziemy zmieniać położenie poszczególnych punktów. Zmienią się co prawda poszczególne kąty, ale nie całkowita krzywizna.

Możemy też dodawać sobie nowe wierzchołki do naszego wielokąta i tworzyć w ten sposób więcej kątów. Pomimo że kątów jest więcej, krzywizna jest nadal ta sama. Tyle tylko, że nasza linia wygląda na bardziej gładką. Jeśli będziemy zwiększać liczbę boków naszego wielokąta aż do nieskończoności, nasza linia stanie się całkowicie gładka. Nie ma już ona poszczególnych kątów, ale wciąż ma krzywiznę. Co ciekawe, nasz model dyskretny – czyli ten z rogami i kątami – mówi nam też, że nawet gdy będziemy przesuwać pewne punkty krzywej, krzywizna się nie zmieni.

Krzywizna Gaussa

Teraz zobaczmy jak to działa w przestrzeni trójwymiarowej. Jeśli mamy powierzchnię tworzoną przez dwie płaszczyzny mające wspólną krawędź, możemy znów użyć strzałki, która będzie skierowana prostopadle do płaszczyzny.

w każdym punkcie płaszczyzny strzałka ma ten sam kierunek, aż do momentu kiedy przesuniemy jej przez krawędź, na drugą płaszczyznę. Wtedy jej kierunek zmienia się, i możemy to sobie zaznaczyć jako łuk na sferze. Im większy kąt pomiędzy płaszczyznami, tym dłuższy będzie ten łuk.

Na długość tego łuku nie wpływa ani wielkość ani kształt naszych płaskich ścian. Mogą mięć dowolny kształt, nie zmienia to wcale kierunku strzałki. Liczy się tylko kąt, pod jakim ściany się łączą. Możemy nawet dodać trzecią ścianę pomiędzy nimi.

Teraz nasz kształt ma trzy krawędzie. Kiedy strzałka przemieszcza się przez te krawędzie, zakreśla na sferze trójkątną łatę, czy płat. Teraz krzywizna naszego kształtu jest określona przez pole powierzchni tego płata. Określając krzywiznę w ten sposób, otrzymujemy coś, co fachowo nazywa się krzywizną Gaussa. Kiedy bryłka spłaszcza się i ma mniejszą krzywizną Gaussa, nasza łatka kurczy się. Kiedy jest bardziej zakrzywiona, łata się powiększa.

Niestety krzywizna Gaussa nie daj nam jeszcze całej informacji, jakiej możemy potrzebować. Na przykład płaszczyzna nie ma oczywiście krzywizny Gaussa. Kiedy zwiniemy ją w walec, prostopadła strzałka przesunie się po nim i zakreśli na sferze pełen okrąg, ale przecież okrąg nie jest łatą i nie ma pola powierzchni. A więc nie ma też krzywizny Gaussa.

Trochę to dziwne, bo każdy widzi, że walec jest mniej płaski niż płaszczyzna. Żeby określić zakrzywienie walca, potrzebujemy innego sposobu opisania krzywizny.

Napięcie i Średnia Krzywizna

Aby to uczynić, pomyślmy o tym, w jaki sposób płaszczyzna zwija się, tworząc walec.

Otóż kiedy łamana zyskuje co do krzywizny, możemy powiedzieć, że jeden z jej punktów jest jakby odciągany od punktów sąsiadujących. Gdybyśmy pomyśleli o takiej linii jako o czymś elastycznym, np napiętej gumce, zobaczylibyśmy, że im bardziej linia jest wykrzywiona, tym bardziej jest napięta. Możemy powiedzieć, że wierzchołek jest jakby ciągnięty przez sąsiadujące z nim krawędzie i że to powoduje napięcie naszej linii w tym wierzchołku. Siła tego ciągnięcia, czyli napięcie wynika z długości i kierunku krawędzi. Możemy myśleć o krzywiźnie jako o napięciu.

Tę samą ideę możemy zastosować w trzech wymiarach. W tym przypadku wierzchołek ciągną już nie krawędzie, ale ściany sąsiadujące. Kształt i ustawienie każdej ściany zadaje pewną siłę, jaką wywiera ona na wierzchołek.

7. **Wygładzanie przez zagęszczanie podziału**

Chociaż modele dyskretne, używające linii łamanych i siatek trójkątnych, są zupełnie inne od modeli używających gładkich krzywych, jest sposób, by przerzucić pomost po którym będziemy przechodzić od jednego do drugiego. Pomostem tym jest proces zwany zagęszczaniem podziału. Wygładza on poprzez dodawanie nowych wierzchołków i wycinanie starych.

Na przykład, kiedy mamy łamaną, bierzemy każdy z jej odcinków, dzielimy go na części, i te punkty podziału wyznaczą nam teraz miejsce, w którym odcinamy stary wierzchołek. Teraz nasza łamana ma mniej ostre kąty. No i więcej odcinków. Powtarzamy ten sam proces na każdym z nowych odcinków i znów odcinamy poprzednie wierzchołki. Jeśli będziemy kontynuować w nieskończoność, otrzymamy gładką linię określoną w sumie przez kilka tylko punktów. Jeśli pamiętamy nasze najstarsze wierzchołki, możemy „kontrolować” naszą linię tylko za pomocą nich.

Ta sama zasada dotyczy obiektów trójwymiarowych. Zamiast przecinać odcinki, tutaj raczej odłupujemy kawałki bryły. Dzieląc krawędzie i ściany, decydujemy, które kawałki przyciąć. I znów takie kolejne przycinania dadzą nam gładką powierzchnię powstałą z niezbyt ładnej, rogatej siatki. I znów, jeśli zapamiętaliśmy nasze najstarsze wierzchołki, możemy ich używać żeby odkształcać naszą gładką powierzchnię.

W ten sposób z siatek otrzymujemy skomplikowane gładkie kształty. Z czegoś ostrego i kanciastego otrzymujemy coś gładkiego i jakby naturalnego.

Czasem jednak musimy używać siatek po to, by opisać coś co zawiera zarówno kawałki gładkie jak i kanciaste.

8. O skanerach i optymalizacji

Trójwymiarowy skaner komputerowy mierzy, w jakim miejscu trójwymiarowej przestrzeni położony jest punkt danego obiektu. Skaner przebiega cały przedmiot i zapisuje położenie iluś jego punktów. Punkty te w komputerze składają się w trójwymiarową siatkę, dając nam świetny model tego przedmiotu. Niestety, istnieje pewien poziom błędu pomiaru. Błędy są niewielkie, ale dotyczą każdego punktu i siatka wydaje się jakby zaburzona. Ponieważ jednak nasze punkty nie są częścią fizycznego przedmiotu, ale jedynie punktami matematycznymi, możemy spokojnie użyć matematycznych narzędzi aby naszą siatkę wygładzić.

Napięcie i redukcja szumu

Jedną z metod jest znalezienie siły napięcia z jaką ciągną każdy wierzchołek sąsiednie trójkątne ściany. bierzemy te siły, sumujemy je, i przesuwamy punkt w tym właśnie kierunku. To zmniejsza ogólne napięcie powierzchni, a co za tym idzie, jej krzywiznę.

W ten sposób skracamy krawędzie, które były za bardzo rozciągnięte, a wydłużamy te, które były za bardzo ściśnięte. Zmniejszenie napięcia wokół każdego z wierzchołków wygładza siatkę. Niestety, nie zawsze daje to efekt, o który nam chodziło. Zaburzenia pomiaru co prawda znikają, ale wraz z nimi krawędzie, które naprawdę istniały w naszym fizycznym obiekcie. Musimy znaleźć taką metodę wygładzania, która nie wygładzi wszystkiego jak leci.

Wygładzanie z zachowaniem głównych cech obiektu

Kiedy redukowaliśmy napięcie naszej siatki, braliśmy pod uwagę wszystkie jej wierzchołki. Ale w naszym przypadku chodzi nam o wygładzenie jedynie tych punktów, które leżą na powierzchniach płaskich albo gładko zakrzywionych, a nie tych, które określają wierzchołek lub krawędź naszego fizycznego przedmiotu.

Jak je odróżnić mając w komputerze tylko zbiór punktów, a właściwie liczb - ich współrzędnych? Otóż najpierw szukamy tych części naszej siatki, które mają największą krzywiznę. Pamiętając, że krzywizna jest tym samym co napięcie, znaleźliśmy w ten sposób jakby strefy dużego duże napięcia, i wiemy że one właśnie określają krawędzie lub rogi fizycznego przedmiotu. I co teraz? Otóż w obszarach gdzie napięcie jest małe, bierzemy każdy punkt siatki i wygładzamy go jak wcześniej, biorąc pod uwagę wszystkie krawędzie, które się w nim stykają. W obszarach gdzie krzywizna jest duża, zmieniamy tylko długości tych krawędzi, które idą wzdłuż napięcia, a nie zmieniamy tych, które w innych kierunkach. W strefie dużego napięcia zmieniamy tylko długości tych krawędzi, które łączą wierzchołki leżące w tej strefie.

W ten sposób mamy komputerowy model przedmiotu, wygładzony a jednak o ostrych krawędziach tam, gdzie one być powinny. Napięcie powierzchniowe jest rozłożone na naszej powierzchni nierównomierne – i oto nam chodziło. Ale czasami jednak chodzi o coś zgoła przeciwnego – żeby napięcie rozłożyć jak najbardziej równomiernie. Tak jest np z bańkami mydlanymi.

9. Dyskretne bańki mydlane

Dobrze wiemy, że kiedy kawałek drutu zawiążemy w pętelkę. i zanurzymy go w wodzie z mydłem,warstwa mydła pozostanie na naszej pętelce wyznaczając płaską powierzchnię. Mydło ma właściwości elastyczne, i zawsze się tak układa, żeby zajmowana przez nie powierzchnia była jak najmniejsza. Taka powierzchnia ma też równomiernie rozłożone napięcie. Nazywamy ją optymalną.

Napięcie w bańkach mydlanych

Patrząc na mydło na poziomie mikroskopowym, zobaczymy cząsteczki mydła „ciągnące się” nawzajem. Możemy myśleć o tych cząsteczkach jako o punktach siatki. Jeśli odciągniemy którąś z cząsteczek od jej sąsiadów, wytworzymy w tym punkcie bardzo duże napięcie. Sąsiadujące cząsteczki tak się od razu ustawią, aby rozdzielić to napięcie pomiędzy siebie.

Jeśli na przykład dmuchamy w powierzchnię mydlaną, dodajemy ciśnienia. Jeśli opiszemy bańkę poprzez siatkę wielokatną, zobaczymy, że powietrze dodaje napięcia, rozciągając siatkę. Pomiędzy ścianami siatki istnieje napięcie, skierowane do wewnątrz. To wewnętrzne napięcie równoważy ciśnienie powietrza skierowane w drugą stronę. W końcu, jeśli wdmuchamy dość powietrza, bańka oderwie się i stanie się doskonałą sferą.

Ponieważ jesteśmy przyzwyczajeni do okrągłych baniek mydlanych, to wszystko nas specjalnie nie dziwi. Powinniśmy jednak zapytać, dlaczego nie umiemy robić baniek o innych kształtach?

Wydmuchać sześcienną bańkę?

Jeśli zaczniemy od kwadratowego kształtu naszej pętelki, i będziemy w nią dmuchać, czemu bańka nie stanie się sześcianem? W modelu ze skanerem widzieliśmy, że różne części powierzchni miały różną krzywiznę. Ostre krawędzie miały dużą krzywiznę, a części płaskie żadnej.

Jeśli nałożymy siatkę na sześcienną bańkę, zobaczymy ten sam efekt – krzywizna będzie rozłożona nierównomiernie. Ściany nie mają krzywizny, krawędzie i wierzchołki – dużą.

Otóż mydło nie pozwoli na takie skupienie napięcia w niektórych miejscach. Jego elastyczność sprawi, że cząsteczki będą chciały rozmieścić to napięcie jak najbardziej równomiernie, i w ten sposób wszystkie ostre krawędzie natychmiast zostaną wygładzone. To właśnie owo wygładzające napięcie sprawia, że bańki są tak okrągłe.

Jakbyśmy nie starali się odkształcić baniek, napięcie zawsze rozłoży się równomiernie na powierzchni. A jednak, znając zasady rządzące napięciem w siatkach dyskretnych, i znając zasady powstawania baniek, możemy stworzyć bardzo dziwne kształty.

Siły wywierane na druty

W naszej zwykłej sferycznej bańce, warstwa mydła jest w spoczynku. Ciśnienie wewnątrz bańki wywiera pewną siłę na dolną płaszczyznę, równoważoną przez ciśnienie bańki w punktach, w których styka się z drutem.

Jeśli dodamy drugi drut, efekt jest ten sam. Ciśnienie wywierane na druga płaszczyznę jest w równowadze z napięciem wokół drutu. Teraz bańka jest związana dwoma drutami, możemy ją odkształcać odciągając druty od siebie lub je do siebie zbliżając. Lub też zmieniając ilość powietrza w środku bańki.

Kiedy ściskamy i rozciągamy bańkę, jej napięcie wywierane przez nią na drut zmienia się. Kiedy bańka jest rozciągana, napięcie to ciągnie ją z powrotem. Bańka chce powrócić do swojego pierwotnego sferycznego kształtu, i dlatego chce przyciągnąć druty do siebie.

Kiedy bańka jest ściskana do wewnątrz, napięcie wywierane teraz na drut skierowane jest na zewnątrz. Aby powrócić do swojego sferycznego kształtu, bańka chce pchać druty na zewnątrz.

Stworzyć penta – powierzchnię

Moglibyśmy wziąć te różne bańkowe kształtowy i ostrożnie skleić je ze sobą jak kawałki puzzle'a. Możemy dodać rozciągniętą bańkę pomiędzy dwie połówki bańki sferycznej. Jednak w efekcie dostajemy wyraźną siłę skierowaną do wewnątrz, która ściągnie bańkę do sfery.

Moglibyśmy spróbować uniknąć tego wracania do kształtu sfery przez ułożenie większej liczby kawałków i zamknięcie ich w koło. Jednak i wtedy rozciągnięte bańki będą chciały ściągnąć wszystko do środka i bańka znów stanie się sferą. Potrzebowalibyśmy jakiejś siły rozpychającej, tak by utrzymać kontrolę nad rozciągniętymi bańkami.

Nasza poprzednia ściśnięta bańka miała w sobie właśnie taką siłę rozpychającą, gdyż jej napięcie, skierowane było na zewnątrz. Jeśli weźmiemy dwie takie ściśnięte banki, złożymy je razem, i utniemy ich krawędzie, nie zniszczymy owej rozpychającej siły. Problemem jest jednak to, że stworzyliśmy teraz bańkę mającą samo – przecinające się krawędzie – z tego powodu nie mogłaby ona powstać z prawdziwego mydła. Nasz model pozostawił już teraz rzeczywistość w tyle i stał się czysto matematyczną ideą.

Do naszego pierścienia rozciągniętych baniek dodamy bańki ściśnięte jak szprychy do koła. Teraz siły rozciągające i ściągające są w równowadze. Musimy tylko starannie dobrać ich wartości. Dostaniemy w wyniku bardzo dziwnie wyglądającą bańkę, która jest w równowadze.

Taka bańka, zwana penta – powierzchnią, jest niesłychanie skomplikowaną konstrukcją. Nie może być utworzona z rzeczywistego mydła, a jedynie z matematyki. Co więcej, jest na tyle złożona, że w obecnej chwili może być zbudowana jedynie jako dyskretna siatka.

Obecny stan rozwoju rachunku różniczkowego jest taki, że nie ma dowodu istnienia penta – powierzchni. Pomimo że umiemy udowodnić istnienie innych zamkniętych powierzchni, bańki takie jak penta powierzchnia są niezwykłym przykładem potęgi geometrii dyskretnej.

Wnioski

Kiedy matematycy po raz pierwszy odkryli rachunek różniczkowy, był on dla nich sposobem na przezwyciężenie uproszczeń wprowadzanych przez widzenie świata w sposób dyskretny. Ponad łamaną zobaczyli krzywą, ponad bryłą – powierzchnię. Szybko jednak odkryli, że sam rachunek różniczkowy ma swoje ograniczenia i że często najlepszym rozwiązaniem jest powrót do prostoty i harmonii świata dyskretnego.