Ćwiczenia 2

1. Przybliżanie całki. Oszacuj całkę $\int_0^\pi \sin x\, dx$, korzystając ze wzoru (1) z $v_j = x_j$ i biorąc węzły rozmieszczone: (i) co π, (ii) co $\pi/2$, (iii) co $\pi/4$, (iv) co $\pi/6$.
Powtórz to samo wybierając v_j dowolnie.
Wartość tej całki faktycznie wynosi 2. Jaki stąd wniosek?

2. Wzór. Wyprowadź wzór (4) ze wzoru (3).

3. Z wykładu. Pokaż, że ciąg $P_k = (1-c)a^3c^{3k}$ jest geometryczny. Wskaż jego iloraz.

4. Całki z wielomianów — przykłady. Przypomnij wartość całki od 0 do a z:
(a) 1, (b) x, (c) x^2, (d) x^3, (e) x^4.
Znajdź pola obszarów ograniczonych, pomiędzy osią OX i wykresem funkcji f:

(i) $f(x) = x^2 - 3x$,
(ii) $f(x) = (5-x)(2-x)$,
(iii) $f(x) = (x+1)(6-x)$,
(iv) $f(x) = x^2(6-x)$,
(v) $f(x) = (6-x)^2 x$,
(vi) $f(x) = x^3 - 8x^2 + 13x - 6$.

5. Całki z wielomianów — przykłady, cd. Oblicz pole obszaru zawartego pomiędzy krzywą $y = x^3$ a prostą $y = x$. (Uwaga: chodzi o pole w sensie szkolnym, zawsze dodatnie).

6. Całka sumy. Oblicz całkę $\int_a^b 1 + x + x^2 + \ldots + x^n\, dx$.

7. Wartość średnia. Znajdź prędkość średnią ciała, którego prędkość w chwili x wyznacza funkcja f, w przedziale od x_1 do x_2:
(i) $f(x) = x^2$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$; (ii) $f(x) = x^2 - 1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

8. Całki wielokrotne. Oblicz:
(i) $\int_0^a 1 \int_0^x 1 \int_0^u 1\, dt\, du\, dx$, (ii) $\int_a^b \int_0^x \int_0^u t^2\, dt\, du\, dx$.

9. (*) Wykaż, że: $\int_0^1 x^n \sin x\, dx < \frac{1}{n+1}$. Wskazówka: ostatnia wartość jest całką z x^n.

10. (**) Udowodnij wzory na całki z $f_1(x) = x$ i $f_2(x) = x^2$ od 0 do b stosując definicję (1) z wartościami $v_j = \frac{1}{2}(x_j + x_{j+1})$.

11. (**) Przeprowadź wywód policzenia całki z x^n w sposób analogiczny do sposobu z wykładu.

Przypomnienie z wykładu — definicje całki. Przypominamy dwie definicje całki z wykładu.

Pierwsza przy "równym" podziale odcinka:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f(v_j)\Delta x \tag{1}$$

gdzie v_j oznacza dowolny punkt z przedziału $\langle x_j, x_{j+1}\rangle$. (Przedział $\langle a, b\rangle$ podzieliliśmy na n równych odcinków wprowadzając $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ i punkty $x_j = j\Delta x,\ j = 0, 1, \ldots, n$). W najprostszym przypadku możemy wziąć $v_j = x_j$.

Drugi wzór mówi tyle, że podział nie musi byc równomierny, byle się coraz bardziej zmniejszał:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f(v_j)\Delta x_j \tag{2}$$

gdzie v_j oznacza nadal dowolny punkt z przedziału $\langle x_j, x_{j+1}\rangle$, z tym że teraz przedział $\langle a, b\rangle$ podzieliliśmy na n już niekoniecznie równych odcinków — wprowadzając punkty pośrednie $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Zakładamy tu, że gdy n rośnie, to największy z podziałów $\Delta x_j = x_{j+1} - x_j$ dąży do zera.

Przypomnienie z wykładu — całka z $\mathbf{x^n}$. Dla dowolnej liczby naturalnej $n = 0, 1, \ldots$

$$\int_0^a x^n\,dx = \frac{1}{n+1} a^{n+1}, \tag{3}$$

$$\int_a^b x^n\,dx = \frac{1}{n+1}\left(b^{n+1} - a^{n+1}\right) \qquad (a < b). \tag{4}$$

Uzupełnienie — całki z funkcji wymiernych. Poprzednie wzory działają również dla $n = -2, -3, \ldots$ i dla dobrych końców przedziałów. Innymi słowy, dla dowolnej liczby naturalnej k większej od 1, czyli $k = 2, 3, \ldots$, mamy

$$\int_a^b x^{-k}\,dx = \frac{1}{1-k}\left(b^{1-k} - a^{1-k}\right) \qquad \text{o ile } a,\ b \text{ są różne od } 0. \tag{5}$$

Oczywiście powyższy wzór nie może działać dla $k = 1$. Dla $k = 1$ rzecz się ma inaczej:

$$\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \ln b - \ln a \qquad \text{o ile } 0 < a < b. \tag{6}$$

Zadania zaczerpnięto z:

Richard Courant, Herbert Robbins, *Co to jest matematyka?*,

Lech Górniewicz, Roman Ingarden, *Analiza matematyczna dla fizyków, tom I.*