

## Ćwiczenia z analizy obrazu

1. **(\*\*\*\*) Interpolacja.** Mamy funkcję określoną na zbiorze  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$  poprzez  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = f(2) = 1$ ,  $f(3) = 2$ ,  $f(4) = 0$ . Zapisz wzór funkcji określonej na  $\langle 0, 5 \rangle$ , która będzie rozszerzeniem funkcji  $f$  i będzie

- (a) “kawałkami liniowa”,
- (b) “kawałkami kwadratowa”,
- (c) różniczkowalna.

Policz pochodne z każdej z tych funkcji tam, gdzie istnieją. Policz ich całki na odcinku  $(0, 5)$ .

2. **(\*\*) Ciągi funkcji.** Mamy funkcję  $f : (-1, 1) \rightarrow \{0, 1\}$  taką, że  $f(0) = 1$  i  $f(x) = 0$  dla każdego  $x \neq 0$ . Jak “przybliżyć” ją funkcjami, które są kawałkami liniowe? kawałkami trygonometryczne lub stałe? kawałkami kwadratowe lub stałe? Dla każdego przypadku wypisz ciąg takich funkcji, które coraz lepiej przybliżają  $f$ .  
Co można powiedzieć o zachowaniu pochodnych i całek z Twoich ciągów funkcji przybliżających  $f$ ?

Jak myślisz, jak określić granicę ciągu funkcji?

3. **(\*) Nieróżniczkowalność I.** Wykaż, że funkcja  $f(x) = |x|$  nie ma pochodnej w punkcie 0; policz jej pochodną lewostronną i prawostronną w 0.
4. **(\*) Nieróżniczkowalność II.** Wykaż, że funkcja  $g$  równa 0 na  $(0, 1)$  i 1 na  $(1, 2)$  nie ma pochodnej w punkcie 1. Jaka jest granica ilorazów różnicowych w tym punkcie?
5. **(\*\*\*\*) Nieróżniczkowalność funkcji nieciągłej.** Wykaż, że funkcja nieciągła w punkcie  $x_0$  nie ma pochodnej w tym punkcie.
6. **(\*) Funkcja kapeluszowa.** Naszkić wykres funkcji “kapeluszowej”

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{jeżeli } |x| < 1 \\ 0 & \text{wpp.} \end{cases}$$

7. **(\*\*)** Za pomocą funkcji  $\phi$  z zadania 6 skonstruuj ciąg funkcji przybliżających funkcję  $f$  z zadania 2.
8. **(\*\*\*\*)** Wykaż, że  $\phi$  z zadania 6 ma pochodną w każdym punkcie. Policz tę pochodną. Musisz zastosować wzory na pochodną funkcji złożonej:

$$f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

jeśli  $f$  i  $g$  są różniczkowalne. Przypominamy, że dla  $n \in \mathbb{Z}$

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \quad (e^x)' = e^x.$$

Wskazówka: Oblicz najpierw pochodne funkcji  $e^{cx}$  (gdzie  $c$  jest stałą),  $e^{f(x)}$ ,  $\frac{1}{1-x^2}$ .