

Ćwiczenia 1

1. Znak sumy. Zapisz za pomocą znaku $\sum$:

$$(a) \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2010}$$

$$(b) \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

$$(c) \frac{3}{4} + \frac{4}{9} + \frac{5}{16} + \dots + \frac{16}{255}$$

Zapisz bez znaku $\sum$:

$$(d) \sum_{n=0}^{100} 2^n, \quad (e) \sum_{n=0}^{100} 2^{n+1}, \quad (f) \sum_{n=1}^N 2^n, \quad (g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}.$$

2. Szereg geometryczny. “Uzasadnij” zbieżność szeregu $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ na rysunku.

Pokaż, że szereg $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n$ jest rozbieżny. (Co to znaczy?) Jakie inne szeregi (sumy) są rozbieżne? Wyprowadzamy wzór na sumę szeregu:

$$S = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots = 1 + q(1 + q + q^2 + \dots) = 1 + qS$$

Zatem $S = 1/(1-q)$. Czy to prawda? Kiedy możemy zrobić takie (oczywiste niby) przejście logiczne?

3. Podstawy całkowania. Policz (a) $\int_0^2 3 \, dx$; (b) $\int_{-5}^2 2 \, dx$; (c) $\int_0^2 -3 \, dx$;

$$(d) \int_{-5}^2 -2 \, dx; \quad (e) \int_0^3 x \, dx; \quad (f) \int_0^3 3x \, dx; \quad (g) \int_0^3 \frac{1}{2}x \, dx; \quad (h) \int_{-3}^0 x \, dx;$$

$$(i) \int_{-3}^3 x \, dx; \quad (j) \int_0^2 1+x+x^2 \, dx; \quad (k) \int_1^2 3+4x \, dx; \quad (l) \int_3^2 4 \, dx; \quad (m) \int_3^2 -4 \, dx;$$

$$(n) \int_2^3 -4 \, dx; \quad (o) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^3 \, dx; \quad (p) \int_0^{2\pi} \sin x \, dx; \quad (q) \int_{-1}^1 \tan x \, dx;$$

$$(r) \int_{-2}^2 x^4 \cos 2x \sin 5x \, dx;$$

$$(s) \text{Znajdź } \int_0^2 f(x) \, dx, \text{ gdzie } f(x) = x^2 \text{ dla } 0 \leq x \leq 1 \text{ oraz } f(x) = x, \text{ dla } 1 \leq x \leq 2.$$

4. **Podstawy całkowania - cd.** Wiemy, że $\int_0^{\pi} \sin x \, dx = 2$ oraz $\int_0^{\pi} x^4 \, dx = \frac{\pi^5}{5}$. Oblicz całkę od 0 do π z f , gdzie

$$f(x) = \begin{cases} 5 \sin x + \frac{1}{3}x - 2x^4 & \text{dla } 0 \leq x \leq \pi/2 \\ 4 \cos x - 5x^2 - 2x^4 & \text{dla } \pi/2 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

5. **Podstawy całkowania - zadanie tekstowe.** Płachta pełna cukierków ma kształt wygiętego prostokąta o wymiarach 30 m na 16 m. Przekrój płachty, wzdłuż krótszego boku, przedstawia krzywą o równaniu $h = \frac{1}{8} \sin \frac{\pi x}{16}$, gdzie h - głębokość, x - odległość od dłuższej krawędzi płachty (w metrach). Oszacuj liczbę cukierków na płachcie. Zaczynij od oszacowania objętości cukierka.

6. **Przyspieszenie, prędkość a droga.** Narysuj wykres prędkości od czasu i odpowiadający mu wykres drogi od czasu dla przypadków:

- prędkość zerowa
- prędkość stała
- prędkość jednostajnie przyspieszona. Jaki ma to związek z całkowaniem? Czym jest całka przyspieszenia? Zrób odpowiednie rysunki.

7. (*) Udowodnij, że $\int_a^b f \, dx = -\int_b^a f \, dx$ dla węzłów równoodległych.

8. (*) Znajdź $\int_a^b \frac{|x|}{x} \, dx$ dla $a < b$.

9. (*) Nie wyliczając wartości ustal, która całka jest większa $\int_0^1 x \, dx$ czy $\int_0^1 x^3 \, dx$.

10. (*) Wykaż nierówność $1 < \int_0^1 e^{x \cdot x} \, dx < e$.

11. (*) Oszacuj z góry całkę $\int_0^1 \frac{\sin x}{1+x^2} \, dx$.

12. (*) Wykaż, że $\int_0^1 x - \frac{1}{100}(x^2 + \sin 3x + \frac{1}{1+x}) \, dx < \frac{3}{2}$ oraz że $\int_0^1 x + \frac{1}{1+x} \, dx < \frac{3}{2}$.

13. (*) Wykaż, że $-1 < \int_{-1}^1 x \sin(50x) \, dx < 1$.

Zadanie dodatkowe ()** - **przybliżenie liczby π .** Oblicz przybliżenie pola koła (o promieniu 1) metodą Eudoksosa - patrz wykład inauguracyjny. Jak dobre jest to przybliżenie przy trzecim pokryciu? Pamiętaj o zapisaniu uzasadnienia, że w kolejnym przybliżeniu pokrywamy co najmniej połowę pola pozostającego do obliczenia.