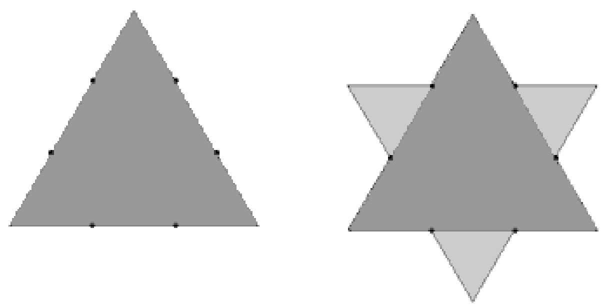
Ćwiczenia 3 dodatek — Płatek śniegu — krzywa Kocha

W 1904 roku szwedzki matematyk Helge von Koch skonstruował dziwną figurę, która z wyglądu przypomina płatek śniegu. Oto jej kosntrukcja.

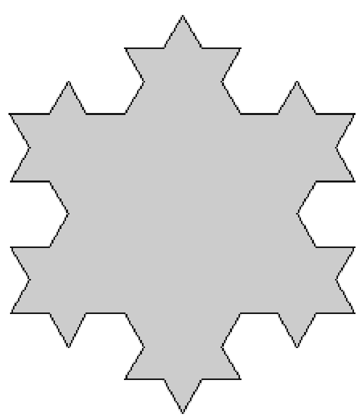
Krok pierwszy

Rysujemy trójkąt równoboczny o długości boku np. 1. Każdy bok trójkąta dzielimy na trzy równe części i doklejamy do części środkowej, tak jak na rysunku, trójkąt równoboczny o boku trzy razy krótszym. Z trójkąta powstała 12 boczna gwiazda. Każdy jej bok ma długość równą $\frac{1}{3}$.



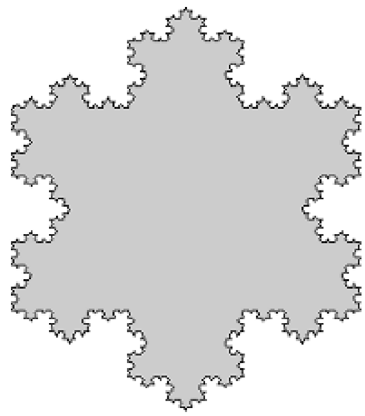
Krok drugi

Każdy bok gwiazdy dzielimy znowu na trzy równe części i do części środkowej doklejamy trójkąt równoboczny o boku trzy razy krótszym niż poprzednio. Otrzymamy 48 boczną gwiazdę o długości boku $\frac{1}{9}$.



Kolejne kroki

W kolejnych krokach postępujemy podobnie jak poprzednio. W trzecim kroku powstanie gwiazdka, która ma $3 \cdot 4^3$ jednakowej długości boków. Rysunek poniżej pokazuje gwiazdkę po 5 krokach konstrukcji. Gwiazdka ta ma $3 \cdot 4^5$, czyli 3072 boki.



Konstrukcję tę możemy powtarzać dowolnie wiele razy. Z powodu ograniczonej rozdzielczości oka następne obrazki nie będą się już wiele różniły od tego, co zobaczyliśmy po 5 krokach, nawet zakładając że mielibyśmy bardzo cienki ołówek do rysowania. Co się dalej będzie działo możemy już sobie tylko wyobrażać. A jak będzie wyglądała taka 'graniczna' gwiazda po wykonaniu nieskończenie wielu kroków? Okazuje się, że jest to figura o trudnych do wyobrażenia własnościach. Nazywamy ją płatkiem śniegu, a jej brzeg krzywą Kocha.

Jest to dziwna krzywa. Ma nieskończoną długość, choć ogranicza obszar o skończonym polu. **Czy umiesz to pokazać?**

Trudno to sobie wyobrazić, ale ta krzywa nie zawiera żadnych odcinków - w każdym swym punkcie ma 'zagięcie', a więc w żadnym swym punkcie nie ma stycznej.

W 1905 roku włoski matematyk Ernesto Cesaro zachwycony wewnętrzną nieskończonością krzywej Kocha napisał o niej: Gdyby była obdarzona życiem, można by się jej pozbyć tylko niszcząc ją w całości. W przeciwnym razie odżywałaby znowu i znowu, z głębi swych trójkątów, tak jak czyni to życie we Wszechświecie.

Jakie jest pole płatka śniegu?

Płatek śniegu, chociaż powstał z sumowania nieskończenie wielu trójkątów, ma skończone pole.

Przyjmijmy znów, że bok trójkąta od którego zaczynamy konstrukcję płatka ma długość równą 1, czyli pole trójkąta jest równe $\frac{\sqrt{3}}{4}$. W pierwszym kroku dorzucamy trzy trójkąty równoboczne o długości boku $\frac{1}{3}$. Każdy z dorzuconych trójkątów ma więc pole dziewięciokrotnie mniejsze niż początkowy trójkąt; a więc do poprzedniego pola należy dorzucić

$$3 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Przypomnijmy, że gwiazdka ma teraz $3 \cdot 4$ boki. Popatrzmy na to, co dzieje się w następnym kroku. Każdy bok 'rodzi' mniejszy trójkącik. Boki trójkątów maleją trzykrotnie, a więc ich pola maleją dziewięciokrotnie. Do pola obliczonego przed chwilą trzeba dorzucić pola 12 nowych trójkącików, czyli

$$3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4},$$

a boków mamy teraz $3 \cdot 4^2$. I co dalej? Znów z każdego takiego boku powstanie trójkącik o polu dziewięć razy mniejszym niż poprzednio i trzeba dorzucić

$$3 \cdot 4^2 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Możemy już spróbować odgadnąć regułę dorzucania pól. Trzeba poprzedni wynik mnożyć przez 4, bo tyle razy rośnie liczba boków, i dzielić przez 9, bo tyle razy maleje pole trójkąta. Krótko mówiąc, poprzedni wynik mnożymy przez $\frac{4}{9}$. Otrzymaliśmy więc, że kolejno dorzucane pola tworzą ciąg geometryczny o ilorazie równym $\frac{4}{9}$. Iloraz tego ciągu jest liczbą dodatnią, mniejszą od 1, a więc istnieje suma nieskończenie wielu wyrazów tego ciągu geometrycznego.

Pole pierwszego trójkąta nie pasuje do tej reguły. To nic nie szkodzi. Zaczniemy sumowanie od wyrazu $3 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$ i to będzie u nas a_1. Tak więc

$$a_1 + a_2 + ...\frac{3 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}}{1 - \frac{4}{9}} = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{20}.$$

Na koniec dorzućmy pole wyjściowego trójkąta, które pominęliśmy w sumowaniu, a otrzymamy

$$\frac{3\sqrt{3}}{20} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

Ta końcowa liczba to pole płatka śniegu.

Uwaga Ciąg liczbowy $a_1, a_2, ...$ jest ciągiem geometrycznym, jeżeli każdy wyraz ciągu (oprócz pierwszego!) jest iloczynem poprzedniego wyrazu przez ustaloną liczbę q. Liczba q nazywana jest ilorazem ciągu geometrycznego.

Suma nieskończenie wielu wyrazów ciągu geometrycznego: Jeżeli $|q| < 1$, to $a_1 + a_2 + ... = \frac{a_1}{1-q}$. (to łatwo pokazać)

Jaka jest długość krzywej Kocha?

Przyjmijmy, że długość boku trójkąta, którego użyliśmy do konstrukcji płatka śniegu, jest równa 1. W pierwszym kroku zastępujemy każdy bok o długości 1 czterema bokami o długości $\frac{1}{3}$, mamy więc łamaną o długości $3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3}$. W drugim kroku mamy $3 \cdot 4^2$ boków długości $\frac{1}{3^2}$, a więc łamana ma długość równą $3 \cdot 4^2 \cdot \frac{1}{3^2}$, czyli $3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2$. W trzecim kroku liczba boków gwiazdki wzrosła do 3×4^3, a długość każdego boku zmalała do $\frac{1}{3^3}$. Cała gwiazdka ma więc obwód równy $3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3$. Po k krokach liczba boków gwiazdki jest równa $3 \cdot 4^k$ a długość boku wynosi $\frac{1}{3^k}$. Obwód gwiazdki jest zatem równy $3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^k$. W każdym następnym kroku obwód gwiazdki rośnie. Gdy k dąży do nieskończoności, to ciąg liczb postaci $\left(\frac{4}{3}\right)^k$ dąży do nieskończoności, a więc

$$\lim_{k\to\infty} 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^k = 3 \cdot \lim_{k\to\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^k = \infty.$$

Naturalnym jest więc przyjąć, że krzywa Kocha ma nieskończoną długość.

Jaki jest mymiar fraktalny krzywej Kocha?

Żeby zastosować definicję wymiaru samopodobieństwa, możemy policzyć wymiar krzywej powstałej na jednym z trzech boków pierwotnego trójkąta.

Spróbuj pokazać, że wymiar fraktalny (podobieństwa) tej krzywej jest równy $\log_3 4$, czyli w przybliżeniu $1,26$. Oznacza to, że krzywa Kocha jest 'grubsza' niż zwykła linia jednowymiarowa!