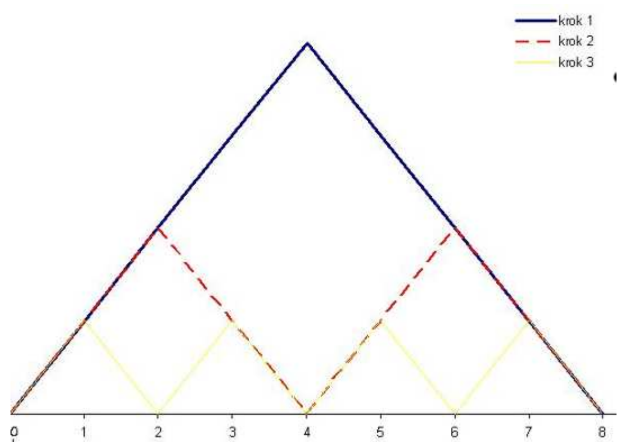
Quiz — Gdzie tkwi błąd?

na podstawie książki W. Sadowskiego *Femme Fatale - Trzy opowieści o królowej nauk.* Wyd. Prószyński i Spółka 2000.

Które z przedstawionych tu rozwiązań są poprawne? Gdzie ukryły się błędy?

1. Mamy łamaną o kątach prostych (patrz rysunek poniżej). W kolejnych krokach zmniejszamy długość odcinków o połowę. Jaka będzie długość łamanej po nieskończenie wielu krokach?



(Odległość między punktem początkowym a końcowym wynosi 8).

Rozwiązanie: linia łamana zbiża się dowolnie blisko do przeciwprostokątnej trójkąta, a więc jej długość wynosi 8.

2. Obliczyć sumę nieskończonego szeregu:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 \dots$$

Rozwiązanie 1: Sumujemy po dwa składniki: $(1 - 1) + (1 - 1) + \dots$, a więc suma szeregu wynosi 0.

Rozwiązanie 2: Sumujemy po dwa składniki: $1 - (1 - 1) - (1 - 1) + \dots$, a więc suma szeregu wynosi 1.

3. Wykażemy, że

$$\infty = -1.$$

Rozwiązanie:

Niech q będzie jakąś liczbą rzeczywistą. Sumujemy szereg geometryczny:

$$1 + q + q^2 + q^3 + \ldots = S$$

(Nazwaliśmy tę sumę S). Ci, którzy znają wzór na taką sumę ze szkoły, mogą ominąć następne dwie linijki, pozostałym przedstawiamy rachunek:

$$S = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots = 1 + q(1 + q + q^2 + q^3 + \ldots) = 1 + q\,S$$
$$\text{zatem} \quad (1-q)\,S = 1$$
$$\text{czyli, dla } q \neq 1: \qquad S = \frac{1}{1-q}.$$

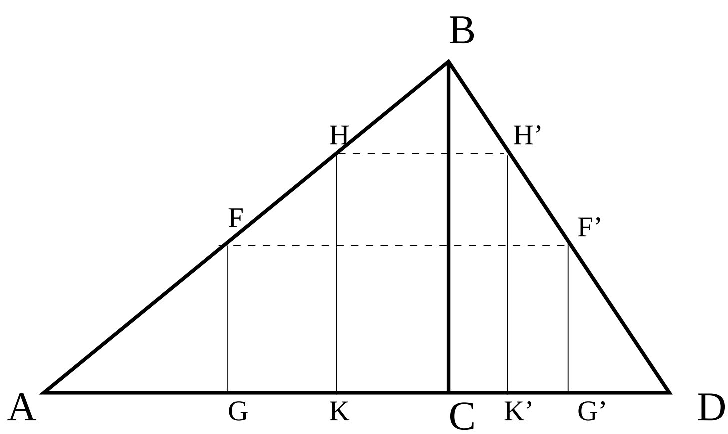
Podstawiamy teraz $q = 2$. Mamy:

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots = -1.$$

Suma po lewej stronie jest równa nieskończoności, a zatem $\infty = -1$, co było do wykazania.

4. Pokazać, że trójkąty prostokątne o wspólnej przyprostokatnej BC mają równe pola.

Rozwiązanie: Umieśćmy trójkąty tak jak na rysunku.



Nietrudno spostrzec, że każdemu pionowemu odcinkowi z trójkąta ABC odowiada dokładnie jeden odcinek pionowy o tej samej długości w trójkącie BCD. Np. $|FG| = |F'G'|$, $|HK| = |H'K'|$. Oba trójkąty składają się z tej samej liczby odcinków o równej długości, a więc ich pola muszą być równe.

5. Obliczyć sumę szeregu:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$$

Rozwiązanie 1: Najpierw prosty rachunek na ułamkach dla pierwszych pięciu wyrazów daje nam:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{5}{6} - \frac{1}{20} = 0,78(3).$$

Zatem całą sumę możemy zapisać tak:

$$0,78(3) - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) - \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{9}\right) - \ldots$$

W każdym nawiasie otrzymujemy liczbę dodatnią, a więc nasz szereg można zapisać jako $0,78(3)-$ (coś dodatniego), więc cała suma na pewno będzie mniejsza niż 0,79.

Rozwiązanie 2: Poprzestawiajmy wyrazy szeregu tak, aby dodawać trójkami: suma dwóch kolejnych odwrotności liczb nieparzystych minus odwrotność kolejnej liczby parzystej. Zmiana kolejności sumowania nie może, oczywiście, sprawić, że pominiemy jakieś składniki szeregu: prędzej czy później zostaną uwzględnione. Mamy więc

$$\left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6}\right) + \ldots$$

Pierwszy składnik szeregu to $5/6 = 0,8(3)$. Drugi składnik, podobnie jak każdy następny, jest dodatni. Istotnie, $1/5 > 1/8$ oraz $1/7 > 1/8$, czyli

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{7} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}.$$

Stąd $1/5 + 1/7 - 1/4 > 0$. Analogiczne rozumowanie — jak na pewno zauważysz — można przeprowadzić dla dwolnego składnika trójkowego. Nasz szereg możemy więc zapisać jako $0,8(3)+$ (coś dodatniego), więc jego suma jest większa niż 0,8.