Ćwiczenia 2

zad.1. Dowód nie wprost faktu, iż liczb rzeczywistych w odcinku $(0,1)$ jest istotnie więcej niż liczb naturalnych. *jeśli tego nie będzie na wykładzie. Jeśli będzie, to powtórzyć ten dowód w wersji gdzie każdą liczbę z odcinka* $(0,1)$ *rozwijamy w systemie dwójkowym — to jest troszkę bardziej eleganckie.*

a) Załóż, że wszystkie liczby z odcinka $(0,1)$ da się ponumerować (ustawić w ciąg). Przedstaw każdą z nich w jej nieskończonym rozwinięciu dziesiętnym (lub dwójkowym).

b) Jak zdefiniować liczbę, która rózni się co najmniej jedną cyfrą od *każdej* z tych, które ustawiliśmy po kolei? Czy jest to liczba z przedziału $(0,1)$?

c) Czy tak się da zrobić niezależnie od tego, jakie ustawienie wybraliśmy na początku? Jaki wniosek można wyciągnąć?

d) Jaki to ma związek z Twierdzeniem Cantora?

zad.2*. Definicja zbieżności, której używają na codzień matematycy, pochodzi od Cauchy'ego i wygląda następująco:

Mówimy, że ciąg $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do liczby g, jeżeli:
dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje takie N naturalne, że dla każdego $n \geq N$
$|c_n - g| < \varepsilon$.

Udowodnij, korzystając z tej formalnej definicji, że ciągi $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{n^2}$, $c_n = \frac{1}{2^n}$ są zbieżne do 0.

zad.3. Znajdź (udowodnij) wzór na sumę n pierwszych wyrazów ciągu geometrycznego. Znajdź wzór na sumę nieskończonego szeregu geometrycznego.