Ćwiczenia 1

zad.1. Hotel Hilberta. Przyjmujemy następujący model matematyczny sytuacji najazdu nieskończonej ilości gości na pełen hotel Hilberta:

$$\begin{aligned} \text{Pokoje} &= \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\} \\ \text{StarzyGoście} &= \mathbb{N} \\ \text{NowiGoście} &= \mathbb{N} \end{aligned}$$

Postaw się na miejscu Dyrektora hotelu i zdefiniuj funkcję przeprowadzki Starych Gości (p) i wprowadzki Nowych Gości (w) do pokoi Hotelu Hilberta.

a) Określ dziedzinę i przeciwdziedzinę funkcji p i w (za pomocą tych zbiorów) oraz zadaj je wzorem.

b) Jak zmodyfikować te funkcje, aby były bijekcjami?

c) Jaki wniosek można wyciągnąć?

zad.2. Narysuj wykresy najprostszych wielomianów: 1, x, x^2, x^3, określ ich dziedzinę i przeciwdziedzinę tak, by były bijekcjami. Znajdź wówczas funkcje odwrotne.

zad.3. Znajdź bijekcję pomiędzy:

a) zbiorem liczb rzeczywistych dodatnich $\mathbb{R}_+$ a zbiorem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$,

b) zbiorem liczb rzeczywistych ujemnych $\mathbb{R}_-$ a $\mathbb{R}$,

c) przedziałem $(0, 1)$ a $\mathbb{R}$.

Jaki (zaskakujący!) wniosek można stąd wyciągnąć?

zad.4. Przechytrzyć Szatana — ciąg dalszy. Przypomnij bijekcję idącą ze zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N}$ na zbiór liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ i ze zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N}$ na zbiór liczb wymiernych dodatnich $\mathbb{Q}_+$. Pokaż, że liczb wymiernych jest tyle samo, co liczb naturalnych (czyli że zbiór $\mathbb{Q}$ jest przeliczalny).