

## Laboratorium 3 — Różniczkowanie

- 1\*. **Macierz iloczynów i ilorazów.** Napisz procedurę `zbuduj_macierz(x,y)`, która jako argumenty przyjmuje dwa **wektory kolumnowe**, a w wyniku zwraca **dwuwierszową macierz**, w której w pierwszym wierszu są iloczyny odpowiadających sobie elementów z wektorów  $x$  i  $y$ , a w drugim wierszu ilorazy. W zapisie matematycznym otrzymana macierz powinna mieć postać:

$$\begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_2 y_2 & x_3 y_3 \dots \\ x_1/y_1 & x_2/y_2 & x_3/y_3 \dots \end{pmatrix}, \quad (1)$$

gdzie  $x_1, x_2, \dots$  to kolejne elementy wektora kolumnowego  $x$ , a  $y_1, y_2, \dots$  to kolejne elementy wektora kolumnowego  $y$ . Przykładowy wynik działania funkcji `zbuduj_macierz`, powinien być następujący:

```
-->zbuduj_macierz((7:9)', (1:3)')
ans =
```

```
7.    16.    27.
7.     4.     3.
```

2. **Procedury w Scilabie — powtórka.** Przypomnij sobie informacje z zeszłych zajęć dotyczące tworzenia procedur w Scilabie, następnie wykonaj następujące zadania:

- a) Napisz procedurę `oblicz_f(x)`, która dla wektora punktów siatki  $x$  obliczy wartości funkcji

$$f(x) = x^3 - 4x. \quad (2)$$

- b) Napisz procedurę `oblicz_f_prim(x)`, która dla danego dla wektora punktów siatki  $x$  obliczy wartości pochodnej funkcji  $f(x)$ , która jest dana wzorem

$$f'(x) = 3x^2 - 4. \quad (3)$$

3. **Pochodna a styczna.** Korzystając z funkcji zdefiniowanych w poprzednim zadaniu przyjrzymy się związkowi funkcji pochodnej ze styczną.

- a) Napisz procedurę `oblicz_styczna(x,x0)`, która dla danego wektora punktów siatki  $x$ , wyliczy wartości funkcji liniowej stycznej do funkcji  $f$  z poprzedniego zadania w ustalonym punkcie  $x_0$ .

**Wskazówka.** Funkcję liniową  $s(x)$  styczną do  $f(x)$  w punkcie  $x_0$  można wyznaczyć posługując się wzorem

$$s(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0). \quad (4)$$

Do wyliczenia wartości funkcji  $f(x_0)$  i jej pochodnej  $f'(x_0)$  skorzystaj z procedur `oblicz_f` i `oblicz_f_prim` z poprzedniego zadania.

- b) Posługując się siatką od -3 do 3 z krokiem 0.01 i procedurą `oblicz_f(x)` wykonaj wykres funkcji  $f(x)$ . Następnie narysuj styczną do otrzymanej krzywej punkcie  $x_0=1.5$ . Powiększ obszar zbliżony do punktu styczności. Zaobserwuj, że w okolicy  $x_0$  wartość funkcji  $s(x)$  jest bardzo dobrym przybliżeniem  $f(x)$ .

**4\*\*.** **Pochodna a styczna — wersja interaktywna.** Zmodyfikuj program z poprzedniego zadania tak, aby rysował styczną do wykresu funkcji  $f(x)$  w punkcie wybranym przez użytkownika. Do tego celu wykorzystaj funkcję Scilaba `xclick`. Jej wywołanie w programie

```
[buttons, x, y] = xclick();
```

spowoduje oczekiwanie na kliknięcie myszką w obrębie wykresu. Po kliknięciu zwrócone zostaną współrzędne kursora myszki. Twój program powinien:

- narysować wykres funkcji  $f(x)$ ,
- wywołać funkcję `xclick()`,
- wykorzystać współrzędną  $x$ -ową punktu, w którym kliknął użytkownik i narysować styczną w punkcie  $(x, f(x))$ .

**5. Pochodna funkcji danej na siatce.** Czasami zdarza się tak, że jedyną dostępną informacją o funkcji są jej wartości w punktach siatki, analityczny wzór nie jest znany. Wtedy w razie potrzeby możemy przybliżać pochodną przy pomocy wzoru

$$f'(x) \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (5)$$

- Napisz procedurę `przybliz_pochodna(f, delta_x)`, która jako parametr przyjmie wektor wartości funkcji na siatce `f` i krok siatki `delta_x`, a w wyniku zwróci wektor przybliżonych wartości pochodnej.
- Przetestuj działanie procedury na przykładzie funkcji  $f$  z zadania 2.
  - wyberz krok `delta_x=0.5` i wygeneruj siatkę `x` z tym krokiem na przedziale od -3 do 3,
  - oblicz wartości funkcji  $f$  przy pomocy `oblicz_f(x)` na wygenerowanej siatce i zapamiętaj jako wektor `f`,
  - korzystając z `przybliz_pochodna(f, delta_x)` i obliczonego `f` wyznacz wektor przybliżonych wartości pochodnej i nazwij go `f_prim_przyblizona`,
  - korzystając z funkcji `oblicz_f_prim(x)` wyznacz dokładne wartości pochodnej na siatce, otrzymany wektor nazwij `f_prim`,
  - porównaj wykresy `f_prim` i `f_prim_przyblizona`.
- Zadanie z poprzedniego podpunktu wykonaj dla siatki z `delta_x=0.1` i `delta_x=0.01`. Jak zmienia się dokładność przewidywań procedury `przybliz_pochodna(f, delta_x)` wraz ze zmniejszaniem kroku siatki? W jakich częściach wykresu obserwujesz największe błędy?

**6\*\*\*. Pochodna kosinusa.** Posługując się napisaną w poprzednim zadaniu procedurą `przybliz_pochodna(f,delta_x)` wykonaj następujące polecenia:

- a) Na siatce od 0 do  $2\pi$  z bardzo drobnym krokiem `delta_x=0.0001` wyznacz przybliżenie pochodnej funkcji `cos(x)`. Wykonaj wykres otrzymanego przybliżenia.
- b) Przyjrzyj się kształtowi otrzymanej funkcji. Postaraj się odgadnąć jej wzór, a następnie narysuj na jednym wykresie przybliżenie i funkcję zdefiniowaną odgadniętym przez Ciebie wzorem.
- c) Wykonaj wykres różnicy przybliżonej wartości funkcji pochodnej i odgadniętego przez Ciebie wyrażenia.